Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

На правах рукопису

Бардила Сергій Олегович

УДК 515.122.4+512.536.7

Повнота топологічних напівграток і напівгруп

01.01.04 — геометрія і топологія

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Гутік Олег Володимирович,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
старший науковий співробітник

Львів — 2017

АНОТАЦІЯ

Бардила С.О. Повнота топологічних напівграток і напівгруп. - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.04 «Геометрія і топологія». – Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2017.

Зміст анотації. Основними напрямками досліджень в дисертаційній роботі є:

— H-замкненість топологічних напівгруп та напівграток;

— топологізація напівгруп.

Однією з форм повноти в класі гаусдорфових топологічних просторів є поняття H-замкнености. У загальній топології це поняття було введено П. Александровим і П. Урисоном як узагальнення поняття компактності. Гаусдорфовий топологічний простір X називається *H-замкненим*, якщо він є замкненим підпростором у довільному гаусдорфовому просторі Y, який містить його як підпростір.

Поняття H-замкнености топологічних просторів природним чином переноситься на класи гаусдорфових топологічних (напівтопологічних) алгебр: груп, напівгруп, напівграток, тощо. Нехай $\mathscr{A}$ – деякий клас гаусдорфових напівтопологічних напівгруп. Напівгрупа $S \in \mathscr{A}$ називається *H-замкненою в класі $\mathscr{A}$*, якщо S є замкненою піднапівгрупою довільної напівтопологічної напівгрупи $T \in \mathscr{A}$, яка містить напівгрупу S. На відміну від H-замкнености топологічних просторів, яка зберігається неперервними відображеннями, H-замкненість топологічних напівгруп не зберігається неперервними гомоморфізмами. Як наслідок, виникає наступне означення:

напівгрупа $S \in \mathscr{A}$ називається *абсолютно H-замкненою в класі $\mathscr{A}$*, якщо довільний неперервний гомоморфний образ S є H-замкненим в $\mathscr{A}$.

H-замкнені та абсолютно H-замкнені напівгрупи введені Дж. Степпом в статтях [119] і [120]. У роботі [119] доведено, що кожна гаусдорфова локально компактна топологічна напівгрупа X вкладається як щільна піднапівгрупа в H-замкнену топологічну напівгрупу. У статті [120] Дж. Степп довів критерій абсолютної H-замкненості для дискретних напівграток: *дискретна напівгратка X є абсолютно H-замкненою тоді і тільки тоді, коли всі ланцюги в X є скінченними.* У цій же роботі Дж. Степп поставив питання: *чи кожна H-замкнена топологічна напівгратка є абсолютно H-замкненою?* Твердження 1.2.1, 1.2.2, 1.2.4 та 1.2.5 дають негативну відповідь на проблему Степпа. Більше того, в наслідку 1.2.9 показано, що *для довільного нескінченного кардинала λ існує H-замкнена топологічна напівгратка, яка допускає 2^{λ} неперервних відкрито-замкнених гомоморфних образів, які не є H-замкненими топологічними напівгратками.* У [72] О. Гутік і Д. Реповш досліджували замикання лінійно впорядкованих топологічних напівграток у топологічних напівгратках. Вони дали необхідні та достатні умови для того, щоб лінійно впорядкована напівгратка була H-замкненою в класі топологічних напівграток і показали, що довільна H-замкнена лінійно впорядкована напівгратка є абсолютно H-замкненою в класі топологічних напівграток. У цій же праці доведено, що кожна лінійно впорядкована топологічна напівгратка вкладається як щільна піднапівгратка в H-замкнену топологічну напівгратку. Твердження 1.1.2 описує всі H-замкнені топологічні напівгратки, які містять напівгратки $(\mathbb{N}, \min)$ та $(\mathbb{N}, \max)$ як щільний дискретний підпростір.

Питання про існування нескінченної нетопологізовної групи, тобто групи на якій існує тільки дискретна гаусдорфова групова топологія поставлено А. Марковим у роботі [4]. У 1980 р. О. Ольшанський розв'язав цю задачу, побудувавши зліченну нетопологізовну групу [5]. З іншого боку, в статті [133] Є. Зеленюк показав, що на довільній групі G існує недискретна гаусдорфова топологія τ така, що (G, τ) є квазітопологічною групою. Проблемою топологізації в класі абелевих напівгруп займався А. Тайманов, який побудував приклад нескінченної нетопологізовної абелевої напівгрупи [7]. У статті [63] О. Гутік показав, що побудована А. Таймановим напівгрупа є H-замкненою в класі топологічних напівгруп, проте кожен її нескінченний неізоморфний образ вже не є H-замкненим.

Біциклічним моноїдом (біциклічною напівгрупою) $\mathcal{C}(p, q)$ називається напівгрупа з одиницею 1 породжена двома елементами p та q, що задовільняють умову $pq = 1$. Задачу топологізації біциклічної напівгрупи вивчали К. Ебергарт і Дж. Селден, які довели, що на ній існує лише дискретна напівгрупова топологія [53]. У статті [40] цей результат було поширено на випадок напівтопологічної біциклічної напівгрупи.

Одним з узагальнень біциклічної напівгрупи є поліциклічні моноїди. Поліциклічним моноїдом $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, називається напівгрупа з нулем і одиницею, породжена елементами $p_1, \ldots, p_n, p_1^{-1}, \ldots, p_n^{-1}$, які пов'язані співвідношеннями: $p_i p_i^{-1} = 1$ і $p_i p_j^{-1} = 0$, для всіх $i \neq j$. Зауважимо, що моноїд $\mathcal{P}_1$ ізоморфний біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем. Поліциклічні моноїди введені в 1970 році М. Ніватом і Ж.-Ф. Перро в статті [107].

Одним з зображень поліциклічних моноїдів є інверсні напівгрупи над орієнтованими графами, які складаються з однієї вершини та скінченної кількості петель. У статті [23] для довільного нескінченного кардиналу λ введено поняття λ-поліциклічного моноїда $\mathcal{P}_\lambda$, який ізоморфний інверсній напівгрупі над орієнтованим графом, що складається з однієї вершини та λ петель. Топологізація інверсних напівгруп над графами досліджувалась у статті [102], де доведено, що кожен ненульовий елемент в топологічній напівгрупі над довільним орієнтованим графом є ізольованою точкою. Твердження 2.2.1 поширює цей результат на випадок напівтопологічного λ-поліциклічного моноїда. У статті [102] доведено, що довільна локально компактна напівгрупова топологія на інверсній напівгрупі над орієнтованим графом, який містить скінченну кількість вершин і стрілок – дискретна. Твердження 2.2.2 поширює цей результат на випадок топологічного λ-поліциклічного моноїда. У статті [62] О. Гутік довів, що локально компактний напівтопологічний поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_1$ є або дискретним або компактним простором. Теорема 2.5.9 узагальнює результат Гутіка і показує, що дихотомія Гутіка справджується для довільного локально компактного напівтопологічного λ-поліциклічного моноїда. Теорема 2.4.8 дає достатні умови для того, щоб λ-поліциклічний моноїд був абсолютно H-замкненим у класі топологічних інверсних напівгруп, а приклад 2.4.13 показує, що дискретний поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_2$ не є H-замкненим в класі топологічних інверсних напівгруп.

Якщо біциклічна напівгрупа $\mathcal{C}(p,q)$ є власною щільною піднапівгрупою топологічної напівгрупи S, то $S\setminus\mathcal{C}(p,q)$ є ідеалом в S [53]. У твердженні 2.2.5 доводиться аналогічний результат для напівтопологічного λ-поліциклічного моноїда. Біциклічна напівгрупа не вкладається в стабільні і Г-компактні топологічні напівгрупи [13, 77]. Не існує зліченно компактної топологічної інверсної напівгрупи, що містить ізоморфну копію біциклічної напівгрупи [71]. У статті [18] Т. Банах, С. Дімітрова й О. Гутік показали, що в аксіоматичних припущеннях (континуум-гіпотези чи аксіоми Мартіна) існує тихоновська зліченно компактна топологічна напівгрупа, яка містить біциклічну напівгрупу [18]. Природнім постає питання: *чи вкладається λ-поліциклічний моноїд в зліченно компактну топологічну напівгрупу?* У праці [68] О. Гутік, К. Павлик й А. Рейтер показали, що нескінченна напівгрупа матричних одиниць не вкладається в зліченно компактну топологічну напівгрупу. З того, що для довільного кардиналу $\lambda > 1$, λ-поліциклічний моноїд містить напівгрупу $\omega \times \omega$-матричних одиниць випливає, що $\mathcal{P}_\lambda$ не вкладається в зліченно компактну топологічну напівгрупу. Теорема 2.3.4 узагальнює результат Гутіка-Павлик-Рейтера та показує, що для довільного нескінченного кардиналу λ напівгрупа $\lambda\times\lambda$-матричних одиниць не вкладається як щільний підпростір у гаусдорфову слабко компактну топологічну напівгрупу. У теоремі 2.3.6 доведено, що не існує слабко компактної топологічної напівгрупи, що містить λ-поліциклічний моноїд як щільну піднапівгрупу.

Нехай α – довільний ненульовий ординал. α-Біциклічним моноїдом (α-біциклічною напівгрупою) $\mathfrak{B}_\alpha$ називається множина $\omega^\alpha\times\omega^\alpha$ наділена наступною бінарною асоціативною операцією:

$$(a,b)\cdot(c,d)=\begin{cases}(a+(c-b),d), & \text{якщо}\quad b\leqslant c;\\ (a,d+(b-c)), & \text{якщо}\quad c<b;\end{cases}$$

де $z=x-y$, якщо $x=y+z$, для довільних ординалів $x\geqslant y$.

Легко бачити, що α-біциклічний моноїд є узагальненням біциклічної напівгрупи, зокрема моноїд $\mathfrak{B}_1$ ізоморфний біциклічній напівгрупі. α-Біциклічний моноїд $\mathfrak{B}_\alpha$ введений в 1973 році Д. Хоганом у праці [85]. Топологізація α-біциклічного моноїда досліджувалась у статтях [86, 87, 115]. Зокрема, в статті [115] А. Селден побудувала недискретну топологію на 2-біциклічному моноїді $\mathfrak{B}_2$. У статті [86] Д. Хоган показав, що елемент (a,b) топологічного α-біциклічного моноїда є ізольованою точкою, якщо a та b є неграничними ординалами. Твердження 3.1.7 узагальнює цей результат і показує, що для ізольованості елемента $(a,b)\in\mathfrak{B}_\alpha$ достатньо нарізної неперервності операції в $\mathfrak{B}_\alpha$ і того, що хоча б один з ординалів a чи b був неграничним. Теорема 3.2.1 стверджує, що для довільного ординалу $\alpha<\omega+1$ існує лише дискретна локально компактна напівгрупова топологія на α-біциклічному моноїді. У прикладі 3.2.2 побудовано недискретну локально компактну топологію, що перетворює $\omega+1$-біциклічний моноїд у топологічну інверсну напівгрупу. З побудованого прикладу випливає, що теорема 2.9 з [86] в якій стверджувалось, що довільна локально компактна напівгрупова топологія на α-біциклічному моноїді є дискретною – невірна.

Ключові слова: H-замкнена топологічна напівгратка, топологічна інверсна напівгрупа, напівтопологічний α-біциклічний моноїд, напівтопологічний поліциклічний моноїд, локально компактний простір.

Список публікацій в яких опубліковано основні результати дисертації:

1. Bardyla, S., Gutik, O.: On H-complete topological semilattices. Математичні студії. **38**(2), 118–123 (2012).
2. Bardyla, S., Gutik, O.: On a semitopological polycyclic monoid. Algebra Discr. Math. **21**(2), 163–183 (2016).
3. Bardyla, S.: Classifying locally compact semitopological polycyclic monoids. Мат. вісник НТШ. **13**, 21–28 (2016).
4. Bardyla, S., Gutik, O.: On a complete topological inverse polycyclic monoid. Карпатські математичні публікації. **8**(2), 183–194 (2016).
5. Bardyla, S.: On a semitopological α-bicyclic monoid. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **81**, 9–22 (2016).
6. Bardyla, S., Gutik, O., Ravsky, A.: H-closed quasitopological groups. Topology Appl. **217**, 51–58 (2017).

Список публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Bardyla, S., Gutik, O.: An example of an H-complete topological semilattice which is not AH–complete. In: Abstracts of the International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach, p. 76. University of Lviv, Lviv, 17–21 September 2012.
2. Bardyla, S., Gutik, O.: On H-complete topological semilattices. In: Abstracts of the 9th International Algebraic Conference in Ukraine, p. 20. University of Lviv, Lviv, 8–13 July 2013.
3. Bardyla, S., Gutik, O.: On a semitopological λ-polycyclic monoid. Тези доповідей Наукової конференції присвяченої 100-річчю від на-

родження К. М. Фішмана і М. К. Фаге, с. 134–135. Чернівецький університет, Чернівці, 1–4 липня 2015 р.

4. Bardyla, S., Gutik, O., Ravsky, A.: H-closed quasitopological groups. Тези доповідей X Літньої школи "Алгебра, Топологія, Аналіз", с. 67. ОНАХТ, Одеса, 3–15 серпня 2015 р.
5. Bardyla, S., Gutik, O., Ravsky, A.: H-closed quasitopological groups. In: Abstracts of the International Conference "Geometry and topology in Odessa - 2016", p. 13. ONAFT, Odessa, 2–8 June 2016.
6. Bardyla, S., Gutik, O., Ravsky, A.: H-closed quasitopological groups. In: Abstracts of the 7th European Congress of Mathematics, p. 379. Technical University of Berlin, Berlin, 18–22 July 2016.
7. Bardyla, S., Gutik, O.: On the embeddings and closures of a topological λ-polycyclic monoid. Тези доповідей XI Літньої школи "Алгебра, Топологія, Аналіз", с. 34. ОНАХТ, Одеса, 1–14 серпня 2016 р.
8. Bardyla, S., Gutik, O.: On the embeddings and closures of a topological λ-polycyclic monoid. In: Abstracts of the International Conference dedicated to the 120th anniversary of Kazimierz Kuratowski, p. 9. University of Lviv, Lviv, 27 September–1 October 2016.
9. Bardyla, S.: On the semitopological locally compact α-bicyclic monoid In: Abstracts of Winter School in Abstract Analysis, section Set theory and Topology. Hejnice, Czech Republic, 28 January–4 February 2017.

Bardyla S.O. Completeness of topological semilattices and semigroups. - Qualifying scientific work on the manuscript.

PhD Thesis for a degree in physics and mathematics, speciality 01.01.04 «Geometry and Topology». – Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2017.

Annotation. The main fields of research in the PhD Thesis are:

— H-closedness of topological semigroups and semilattices;

— topologization of semigroups.

In the class of topological spaces, H-closedness is one of the forms of completeness. In general topology, this notion was introduced by P. Alexandroff and P. Uryson as a generalization of compactness. A Hausdorff topological space X called *H-closed*, if X is a closed subset of each topological space Y which contains X as a subspace.

The notion of H-closed topological space has its natural analog in different classes of Hausdorff (semi)topological algebras: groups, semigroups, semilattices etc. Let $\mathscr{A}$ be an arbitrary class of Hausdorff semitopological semigroups. A semigroup $S \in \mathscr{A}$ is called *H-closed in $\mathscr{A}$*, if S is a closed subsemigroup of an arbitrary semigroup $T \in \mathscr{A}$ which contains S. H-closedness of topological spaces is preserved by continuous images. However, there exists a continuous homomorphic image of a H-closed topological semigroup which is not H-closed. As a consequence, the following definition arises: a semigroup $S \in \mathscr{A}$ is called *absolutely H-closed in the class $\mathscr{A}$*, if each continuous homomorphic image of S is H-closed in $\mathscr{A}$.

H-closed and absolutely H-closed semigroups were introduced by J. Stepp in [119] and [120]. In [119] it was proved that each Hausdorff locally compact topological semigroup X embeds as a dense subsemigroup into an H-closed topological semigroup. In [120] J. Stepp gave necessary and sufficient conditions of the absolute H-closedness for discrete semilattices: *a discrete semilattice*

X is absolutely H-closed if and only if all maximal chains in X are finite. Also in [120] J. Stepp asked the following question: *is it true that each H-closed topological semilattice is absolutely H-closed?* Propositions 1.2.1, 1.2.2, 1.2.4 and 1.2.5 give a negative answer on Stepp's question. Moreover, Corollary 1.2.9 shows that *for each infinite cardinal λ there exists an H-closed topological semilattice which has 2^λ continuous open-and-closed homomorphic images which are not H-closed.* In [72] O. Gutik and D. Repovš investigated the closures of the linearly ordered topological semilattices in topological semilattices. They gave necessary and sufficient conditions for linearly ordered topological semilattices to be H-closed and showed that each H-closed linearly ordered semilattice is absolutely H-closed in the class of topological semilattices. Also in [72] the authors proved that each linearly ordered topological semilattice embeds as a dense subsemilattice in a linearly ordered H-closed topological semilattice. Proposition 1.1.2 describes all H-closed topological semilattices which contain the semilattices $(\mathbb{N}, \min)$ and $(\mathbb{N}, \max)$ as dense discrete subspaces.

The problem of non-discrete Hausdorff topologization of infinite groups was posed by A. Markov in [4]. This problem was resolved by O. Olshanskiy in [5] who constructed an infinite countable group G admitting no non-discrete Hausdorff group topologies. On the other hand, Ye. Zelenyuk in [133] proved that each group G admits a non-discrete Hausdorff topology τ such that (G, τ) is a quasitopological group. Topologizations of an abelian semigroups were investigated by A. Taimanov, who constructed an example of an infinite abelian semigroup A which admits only discrete semigroup topology [7]. In [63], O. Gutik showed that the semigroup A which was constructed by Taimanov is H-closed in the class of topological semigroups, but each infinite non-isomorphic image of A is not H-closed.

The bicyclic monoid (bicyclic semigroup) $\mathcal{C}(p, q)$ is a semigroup with the unit 1 which is generated by two elements p an q subject to the condition $pq = 1$. Topologization of the bicyclic monoid was investigated by C. Eberhart and J. Selden. They proved that the bicyclic semigroup admits only the discrete semigroup Hausdorff topology [53]. In [40] this result was extended for the case of semitopological bicyclic semigroup.

One of generalizations of the bicyclic monoid is a polycyclic monoid. A polycyclic monoid $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, is a semigroup with identity and zero generated by the elements $p_1, .., p_n, p_1^{-1}, .., p_n^{-1}$ subject to the conditions $p_i p_i^{-1} = 1$ and $p_i p_j^{-1} = 0$ for all $i \neq j$. Observe that the monoid $\mathcal{P}_1$ is isomorphic to the bicyclic monoid with adjoined zero. The polycyclic monoids were introduced in 1970 by M. Nivat and J.-F. Perrot in [107].

One of the representation of the polycyclic monoid $\mathcal{P}_n$ is the graph inverse semigroup over a directed graph which consists of one vertex and n edges. In [23] for an arbitrary infinite cardinal λ there was introduced a notion of a λ-polycyclic monoid $\mathcal{P}_\lambda$ which is isomorphic to the graph inverse semigroup over the directed graph E which consists of one vertex and λ edges. Topologization of graph inverse semigroups was investigated in [102], where it was shown that each non-zero element of an arbitrary topological graph inverse semigroup is an isolated point. Proposition 2.2.1 extends this result over the case of a semitopological λ-polycyclic monoid. In [102] it was proved that each locally compact semigroup topology on the graph inverse semigroup over a finite graph E is discrete. Proposition 2.2.2 extends this result over the case of a topological λ-polycyclic monoid. In [62] O. Gutik proved that a Hausdorff semitopological locally compact polycyclic monoid $\mathcal{P}_1$ is either compact or discrete. Theorem 2.5.9 extends Gutik's result and shows that for each non-zero cardinal λ a Hausdorff semitopological locally compact monoid $\mathcal{P}_\lambda$ is either compact or discrete. Theorem 2.4.8 gives sufficient conditions for the λ-polycyclic monoid to be absolutely H-closed in the class of topological inverse semigroups. Example 2.4.13 shows that the discrete monoid $\mathcal{P}_2$ is not H-closed in the class of topological inverse semigroups.

If a bicyclic semigroup $\mathcal{C}(p, q)$ embeds as a dense subsemigroup in a topological semigroup S then the set $S\setminus\mathcal{C}(p,q)$ is an ideal in S [53]. In Proposition 2.2.5 a similar result was proved for a semitoplogical λ-polycyclic monoid. The bicyclic monoid does not embed in the stable and Γ-compact topological semigroups [13, 77]. There exists no countably compact topological inverse semigroup which contains an isomorphic copy of the bicyclic semigroup [71]. However, in [18] T. Banakh, S. Dimitrova and O. Gutik showed that under set theoretic assumptions (Continuum Hypothesis or Martin's axiom) there exists a Tychonoff countably compact topological semigroup which contains an isomorphic copy of the bicyclic semigroup [18]. A natural question arises: *Can the λ-polycyclic monoid be embedded in a countably compact topological semigroup?* In [68] O. Gutik, K. Pavlyk and A. Reiter show that an infinite semigroup of matrix units does not embed in a countably compact topological semigroup. Since for each cardinal $\lambda > 1$, the λ-polycyclic monoid contains an isomorphic copy of the semigroup of $\omega \times \omega$-matrix units we see that the monoid $\mathcal{P}_\lambda$ does not embed in a countably compact topological semigroup. Theorem 2.3.4 generalizes this result of Gutik, Pavlyk and Reiter and shows that for each infinite cardinal λ the semigroup of $\lambda\times\lambda$-matrix units does not embed as a dense subsemigroup into a feebly compact topological semigroup. Theorem 2.3.6 shows that there exists no feebly compact topological semigroup which contains the monoid $\mathcal{P}_\lambda$ as a dense subsemigroup.

Let α be an arbitrary non-zero ordinal. By the α-bicyclic monoid (α-bicyclic semigroup) $\mathfrak{B}_\alpha$ we denote the set $\omega^\alpha\times\omega^\alpha$ endowed with the following semigroup operation:

$$(a,b)\cdot(c,d)=\begin{cases}(a+(c-b),d), & \text{if } \ b\leqslant c;\\ (a,d+(b-c)), & \text{if } \ c<b;\end{cases}$$

where $z=x-y$ iff $x=y+z$, for each ordinals $x\geqslant y$.

Obviously, the α-bicyclic monoid is a generalization of the bicyclic semigroup. In particular, the monoid $\mathfrak{B}_1$ is isomorphic to the bicyclic semigroup. An α-bicyclic monoid $\mathfrak{B}_\alpha$ was introduced by J. Hogan in [85]. Topologizations of the α-bicyclic monoid were investigated in [86,87,115]. In particular, in [115] A. Selden constructed a non-discrete inverse semigroup topology on the monoid $\mathfrak{B}_2$. In [86], J. Hogan showed that an element (a, b) of a topological α-bicyclic monoid is an isolated point if either a or b is a non-limit ordinal. Proposition 3.1.7 extends this result and shows that an element (a, b) of a semitopological polycyclic monoid $\mathfrak{B}_\alpha$ is an isolated point if either a or b is a non-limit ordinal. Theorem 3.2.1 shows that, for each ordinal $\alpha < \omega + 1$, there exists only the discrete Hausdorff locally compact semigroup topology on the α-bicyclic monoid. However, in Example 3.2.2 a non-discrete Hausdorff locally compact inverse semigroup topology on $\mathfrak{B}_{\omega+1}$ is constructed. This example shows that there is a gap in proof of the Theorem 2.9 from [86], where it was claimed that for each ordinal α the only Hausdorff locally compact semigroup topology on the α-bicyclic monoid is a discrete topology.

Key words: H-closed topological semilattice, topological inverse semigroup, semitopological α-bicyclic monoid, semitopological polycyclic monoid, locally compact space.

List of publications:

1. Bardyla, S., Gutik, O.: On H-complete topological semilattices. Math. Stud. **38**(2), 118–123 (2012).
2. Bardyla, S., Gutik, O.: On a semitopological polycyclic monoid. Algebra Discr. Math. **21**(2), 163–183 (2016).
3. Bardyla, S.: Classifying locally compact semitopological polycyclic monoids. Mathematical Bulletin of the Shevchenko Scientific Society. **13**, 21–28 (2016).
4. Bardyla, S., Gutik, O.: On a complete topological inverse polycyclic monoid. Carpathian Math. Publ. **8**(2), 183–194 (2016).
5. Bardyla, S.: On a semitopological α-bicyclic monoid. Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. **81**, 9–22 (2016).

6. Bardyla, S., Gutik, O., Ravsky, A.: H-closed quasitopological groups. Topology Appl. **217**, 51–58 (2017).

List of conference abstracts:

1. Bardyla, S., Gutik, O.: An example of an H-complete topological semilattice which is not AH–complete. In: Abstracts of the International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach, p. 76. University of Lviv, Lviv, 17–21 September 2012.
2. Bardyla, S., Gutik, O.: On H-complete topological semilattices. In: Abstracts of the 9th International Algebraic Conference in Ukraine, p. 20. University of Lviv, Lviv, 8–13 July 2013.
3. Bardyla, S., Gutik, O.: On a semitopological λ-polycyclic monoid. In: Abstracts of Scientific conference dedicated to 100th anniversary of K. M. Fishman and M. K. Fague, p. 134–135. National University of Chernivtsi, Chernivtsi, 1–4 July 2015.
4. Bardyla, S., Gutik, O., Ravsky, A.: H-closed quasitopological groups. Abstracts of X Summer School "Algebra, Topology, Analysis", p. 67. ONAFT, Odesa, 3–15 August 2015.
5. Bardyla, S., Gutik, O., Ravsky, A.: H-closed quasitopological groups. In: Abstracts of the International Conference "Geometry and topology in Odessa - 2016", p. 13. ONAFT, Odessa, 2–8 June 2016.
6. Bardyla, S., Gutik, O., Ravsky, A.: H-closed quasitopological groups. In: Abstracts of the 7th European Congress of Mathematics, p. 379. Technical University of Berlin, Berlin, 18–22 July 2016.
7. Bardyla, S., Gutik, O.: On the embeddings and closures of a topological λ-polycyclic monoid. Abstracts of XI Summer School "Algebra, Topology, Analysis", p. 34. ONAFT, Odesa, 1–14 August 2016.
8. Bardyla, S., Gutik, O.: On the embeddings and closures of a topological λ-polycyclic monoid. In: Abstracts of the International Conference

dedicated to the 120th anniversary of Kazimierz Kuratowski, p. 9. University of Lviv, Lviv, 27 September–1 October 2016.

9. Bardyla, S.: On the semitopological locally compact α-bicyclic monoid In: Abstracts of Winter School in Abstract Analysis, section Set theory and Topology. Hejnice, Czech Republic, 28 January–4 February 2017.

ЗМІСТ

Анотація **2**

Вступ **17**

Історична довідка, огляд літератури та мотивація досліджень . . 17

Означення і допоміжні твердження 28

Розділ 1. **H-замкнені топологічні напівгратки** **47**

1.1. H-поповнення та AH-поповнення топологічних напівграток $(\mathbb{N}, max)$ та $(\mathbb{N}, min)$ 47

1.2. Розв'язок проблеми Степпа 50

Розділ 2. **λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$** **56**

2.1. Алгебраїчні властивості λ-поліциклічного моноїда 58

2.2. Напівгрупові топологізації λ-поліциклічного моноїда $\mathcal{P}_\lambda$ . . . 64

2.3. Про вкладення λ-поліциклічного моноїда $\mathcal{P}_\lambda$ в близькі до компактних топологічні напівгрупи 70

2.4. Замикання λ-поліциклічного моноїда $\mathcal{P}_\lambda$ в топологічних інверсних напівгрупах 74

2.5. Локально компактний напівтопологічний λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ 88

Розділ 3. **α-Біциклічний моноїд $\mathfrak{B}_\alpha$** **97**

3.1. Про напівтопологічний α-біциклічний моноїд $\mathfrak{B}_\alpha$ 98

3.2. Локально компактні напівгрупові топології на α-біциклічному моноїді $\mathfrak{B}_\alpha$ 102

Висновки **115**

Список використаних джерел **117**

Список публікацій здобувача за темою дисертації **128**

ВСТУП

Історична довідка, огляд літератури та мотивація досліджень

Теорія топологічних напівгруп зародилася в кінці 40-х років минулого століття. Основними результатами першого етапу розвитку теорії топологічних напівгруп є праці Уоллеса [123–129], Ісекі [90], Коха [95], Нумакури [108, 109], Тамури [122], Шварца [121], Фосетта [54, 55]. Підсумком першого етапу розвитку теорії топологічних напівгруп є оглядова стаття Уоллеса [130]. В кінці п'ятдесятих років починається бурхливий розвиток топологічної алгебри і, зокрема, теорії топологічних напівгруп. У цьому напрямку починають працювати математики світового рівня: Андерсон, Гадсон, Гофманн, Коллінз, Мостерт, Селден, Х'юітт. У цей час в основному досліджуються компактні звязні топологічні напівгрупи. Результати цих досліджень викладені в огляді Мостерта [103] і в монографіях Гофманна і Мостерта [80] та Паалман-де-Міранди [110].

В 60-х роках поле досліджень в теорії топологічних напівгруп значно розширюється, в ньому з'являються багато нових напрямків, основними з яких є:

- напівтопологічні (лівотопологічні, правотопологічні) напівгрупи, тобто напівгрупи з неперервними (лівими, правими) зсувами;
- топологічні напівгратки;
- топологічні інверсні напівгрупи;
- напівгрупи на многовидах;
- ліво – інваріантні (право – інваріантні) міри на топологічних напівгрупах

та інші. Результати досліджень цих та інших напрямків теорії топологічних напівгруп викладено в монографіях [8, 35–37, 42, 52, 57–59, 78–84, 88, 93, 104, 110, 112, 114, 117, 134].

Основними напрямками досліджень в дисертаційній роботі є:

- H-замкненість топологічних напівгруп та напівграток;
- топологізація напівгруп.

Однією з форм повноти в класі гаусдорфових топологічних просторів є поняття H-замкненості. У загальній топології це поняття було введено П. Александровим і П. Урисоном як узагальнення поняття компактності. Гаусдорфовий топологічний простір X називається *H-замкненим*, якщо він є замкненим підпростором в кожному гаусдорфовому просторі Y, який містить його як підпростір. У 1923 р. в роботі [11] П. Александров і П. Урисон довели критерій H–замкненості топологічних просторів: *гаусдорфовий топологічний простір X є H-замкненим тоді і лише тоді, коли для довільного відкритого покриття $\mathcal{F} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ простору X існує скінченний набір $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ елементів множини A такий, що $\cup_{k=1}^{n} \overline{U_{\alpha_k}} = X$.* З критерію H-замкненості випливає, що регулярний топологічний простір X є H-замкненим тоді і лише тоді, коли X – компактний. У 1940 р. М. Катетов довів, що неперервний образ H-замкненого топологічного простору є H-замкненим і, якщо кожен замкнений підпростір гаусдорфового простору X є H-замкненим, то X – компактний простір [94].

Поняття H-замкненості топологічних просторів природним чином переноситься на класи гаусдорфових топологічних (напівтопологічних) алгебр: груп, напівгруп, напівграток, тощо. Нехай $\mathscr{A}$ – деякий клас гаусдорфових напівтопологічних напівгруп. Напівгрупа $S \in \mathscr{A}$ називається *H-замкненою в класі $\mathscr{A}$*, якщо S є замкненою піднапівгрупою кожної напівтопологічної напівгрупи $T \in \mathscr{A}$, яка містить S як піднапівгрупу.

H-замкнені топологічні групи в класі топологічних груп вивчав Д. Райков, і він їх називав *абсолютно замкненими*. У 1946 р. Д. Райков довів критерій абсолютної замкненості топологічних груп: *топологічна група є абсолютно замкненою в класі топологічних груп тоді і тільки тоді, коли вона* *повна стосовно двобічної рівномірності* [6]. Зауважимо, що гомоморфний неперервний образ абсолютно замкненої топологічної групи не обов'язково є абсолютно замкненим. Як наслідок виникає наступне означення: напівгрупа $S \in \mathscr{A}$ називається *абсолютно H-замкненою в класі $\mathscr{A}$*, якщо довільний неперервний гомоморфний образ S є H-замкненим в $\mathscr{A}$. В теорії топологічних груп абсолютно H-замкнені топологічні групи називаються h-повними. Досі повністю нерозв'язаним залишається питання: коли абсолютно замкнена топологічна група є h-повною? Відомо, що прямий добуток h-повних топологічних груп є h-повним і замкнена центральна підгрупа h-повної топологічної групи є h-повною [50]. У 2003 р. О. Равський вказав умови, за яких комутативна топологічна група є H–замкненою в класі паратопологічних груп [113]. У роботі [25] були вказані достатні умови для того, щоб квазітопологічна (напівтопологічна з неперервною інверсією) група була H-замкнена в класі квазітопологічних груп, що дало змогу розв'язати проблему Архангельского–Чобана, поставлену в роботі [15], а саме, що *топологічна група G є H-замкненою в класі квазітопологічних груп тоді і тільки тоді, коли G є повною за Райковим.* У роботі [61] О. Гутік довів, що *топологічна група G є H-замкненою в класі напівтопологічних інверсних напівгруп з неперервною інверсією тоді і тільки тоді, коли G є компактним простором.*

H-замкнені та абсолютно H-замкнені напівгрупи введені Дж. Степпом в статтях [119] та [120], де вони називались максимальними (відп. абсолютно максимальними) напівгрупами. У роботі [119] доведено, що кожна гаусдорфова локально компактна топологічна напівгрупа X вкладається як щільна піднапівгрупа в H-замкнену топологічну напівгрупу. В статті [120] Дж. Степп довів критерій абсолютної H-замкненості для дискретних напівграток: *дискретна напівгратка X є абсолютно H-замкненою тоді і тільки тоді, коли всі ланцюги в X є скінченними.* У цій же роботі Дж. Степп поставив питання: *чи кожна H-замкнена топологічна напівгратка* *є абсолютно H-замкненою?* В статті [72] О. Гутік і Д. Реповш досліджували замикання лінійно впорядкованих топологічних напівграток у топологічних напівгратках. Вони дали необхідні і достатні умови для того, щоб лінійно впорядкована напівгратка була H-замкненою в класі топологічних напівграток і показали, що довільна H-замкнена лінійно впорядкована напівгратка є абсолютно H-замкненою в класі топологічних напівграток. У цій же праці доведено, що кожна лінійно впорядкована топологічна напівгратка вкладається як щільна піднапівгратка в H-замкнену топологічну напівгратку.

В статті [3] доведено, що симметричний інверсний моноїд обмеженого скінченого рангу є H-замкеним в класі напівтопологічних напівгруп з неперервної інверсією. О. Гутік і К. Павлик в роботі [67] довели, що напівгрупа матричних одиниць є H-замкненою в класі топологічних інверсних напівгруп. У праці [68] О. Гутік, К. Павлик й А. Рейтер показали, що напівгрупа матричних одиниць є H-замкнена в класі топологічних напівгруп, якщо піднапівгрупа її ідемпотентів є компактною.

Питання існування нескінченної нетопологізовної групи, тобто групи на якій існує лише дискретна гаусдорфова групова топологія було поставлено А. Марковим у роботі [4]. В 1980 р. О. Ольшанський розв'язав цю задачу, побудувавши зліченну нетопологізовну групу [5]. З іншого боку в статті [133] Є. Зеленюк показав, що на довільній групі G існує недискретна гаусдорфова топологія τ така, що (G, τ) є квазітопологічною групою. Проблему топологізації абелевих напівгруп займався А. Тайманов, який побудував приклад нетопологізовної абелевої напівгрупи [7]. В статті [63] О. Гутік показав, що побудована А. Таймановим напівгрупа є H-замкненою в класі топологічних напівгруп, проте кожен її нескінченний неізоморфний образ вже не є H-замкненою топологічною напівгрупою.

Біциклічним моноїдом (біциклічною напівгрупою) називається напівгрупа $\mathcal{C}(p, q)$ з одиницею 1 породжена двома елементами p та q, що задовільняють умову $pq = 1$. Біциклічна напівгрупа відіграє важливу роль як в алгебраїчній теорії напівгруп, так і в теорії топологічних напівгруп. Наприклад, добре відомий результат Андерсена [12] стверджує, що (0–)проста напівгрупа є цілком (0–)простою тоді і лише тоді, коли вона не містить біциклічної напівгрупи. Задачу топологізації біциклічної напівгрупи вивчали К. Ебергарт і Дж. Селден, які довели, що на ній існує лише дискретна напівгрупова топологія [53]. В статті [40] цей результат було поширено на випадок напівтопологічної біциклічної напівгрупи.

Одним з узагальнень біциклічної напівгрупи є поліциклічні моноїди. Поліциклічним моноїдом $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, називається напівгрупа з нулем, яка визначається наступними співвідношеннями:

$$\mathcal{P}_n = \left\langle \{p_i\}_{i \leqslant n \in \mathbb{N}}, \left\{p_i^{-1}\right\}_{i \leqslant n \in \mathbb{N}} \mid p_i p_i^{-1} = 1, p_i p_j^{-1} = 0 \text{ для всіх } i \neq j \right\rangle.$$

Зауважимо, що моноїд $\mathcal{P}_1$ ізоморфний біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем. Поліциклічні моноїди введені в 1970 р. М. Ніватом і Ж.-Ф. Перро в статті [107].

Нехай $E = (E^0, E^1, r, s)$ – довільний орієнтований граф, де E_0 – множина вершин графа E, E_1 – множина стрілок графа E, а r і s функції визначені на множині E_1, які кожній стрілці ставлять у відповідність вершину в яку вона входить і з якої вона виходить, відповідно.

Інверсною напівгрупою $G(E)$ над орієнтованим графом E називається напівгрупа з нулем, породжена елементами множин E^0, E^1 та $E^{-1} = \{e^{-1} : e \in E^1\}$ з визначеними на них наступними співвідношеннями:

(i) $a \cdot b = a$, якщо $a = b$ і $a \cdot b = 0$, якщо $a \neq b$;

(ii) $s(e) \cdot e = e \cdot r(e) = e$;

(iii) $e^{-1} \cdot s(e) = r(e) \cdot e^{-1} = e^{-1}$;

(iv) $e \cdot f^{-1} = s(e)$, якщо $e = f$ і $e \cdot f^{-1} = 0$, якщо $e \neq f$,

для всіх елементів $a, b \in E^0$ і $e, f \in E^1$.

Інверсна напівгрупа над орієнтованим графом, що складається з однієї вершини та n петель ізоморфна поліциклічному моноїду $\mathcal{P}_n$. Алгебраїчні властивості інверсних напівгруп над графами та поліциклічних моноїдів досліджувались в статтях [91, 92, 100, 101]. В статті [23] для довільного кардиналу $\lambda > 1$ введено поняття λ-поліциклічного моноїда $\mathcal{P}_\lambda$, одне з зображень якого має вигляд інверсної напівгрупи над орієнтованим графом, що складається з однієї вершини та λ петель. Топологізація інверсних напівгруп над графами досліджувалась у статті [102], де доведено, що кожен ненульовий елемент у топологічній інверсній напівгрупі над довільним орієнтованим графом є ізольованою точкою і, що довільна локально компактна напівгрупова топологія на інверсній напівгрупі над орієнтованим графом, який містить скінченну кількість вершин і стрілок є дискретною. В статті [62] О. Гутік довів, що локально компактна напівтопологічна біциклічна напівгрупа з приєднаним нулем є або дискретним, або компактним простором.

Якщо біциклічна напівгрупа $\mathcal{C}(p,q)$ є власною щільною піднапівгрупою топологічної напівгрупи S, то $S\backslash\mathcal{C}(p,q)$ є ідеалом в S [53]. Біциклічна напівгрупа не вкладається в стабільні й Г-компактні топологічні напівгрупи [13, 77]. Не існує зліченно компактної топологічної інверсної напівгрупи, що містить ізоморфну копію біциклічної напівгрупи [71]. В статтях [17] і [18] Т. Банах, С. Дімітрова й О. Гутік вказали умови, за яких біциклічна напівгрупа не вкладається в псевдокомпактні та зліченокомпактні топологічні напівгрупи. Тим не менше, в аксіоматичних припущеннях (континуум-гіпотези чи аксіоми Мартіна) існує тихонівська зліченно компактна топологічна напівгрупа, яка містить біциклічну напівгрупу [18]. Природним постає питання: чи вкладається λ-поліциклічний моноїд у зліченно компактну топологічну напівгрупу?

Нехай α – довільний ординал. α-Біциклічним моноїдом (α-біциклічною напівгрупою) $\mathfrak{B}_\alpha$ називається множина $\omega^\alpha \times \omega^\alpha$ з визначеною на ній бінарною асоціативною операцією:

$$(a,b)\cdot(c,d)=\begin{cases}(a+(c-b),d), & \text{якщо } \ b\leqslant c;\\ (a,d+(b-c)), & \text{якщо } \ c<b;\end{cases}$$

де $z=x-y$, якщо $x=y+z$, для довільних ординалів $x\geqslant y$.

Легко бачити, що α-біциклічний моноїд є узагальненням біциклічної напівгрупи, зокрема, моноїд $\mathfrak{B}_1$ ізоморфний біциклічній напівгрупі. α-Біциклічний моноїд $\mathfrak{B}_\alpha$ введений у 1973 р. Д. Хоганом у роботі [85]. В цій же роботі Д. Хоган дослідив алгебраїчні властивості α-біциклічного моноїда і показав, що $\mathfrak{B}_\alpha$ відіграє важливу роль в структурі регулярних біпростих напівгруп, множина ідемпотентів яких ізоморфна напівгратці $(\omega^\alpha,\max)$. Топологізація α-біциклічного моноїда досліджувалась в статтях [86,87,115]. Зокрема, в статті [115] А. Селден побудувала недискретну топологію на 2-біциклічному моноїді $\mathfrak{B}_2$. В статті [86] Д. Хоган показав, що елемент (a,b) топологічного α-біциклічного моноїда є ізольованим, якщо a та b є неграничними ординалами. Топологізація напівгруп, які є узагальненнями біциклічної напівгрупи досліджувалась у статтях [44, 56, 73].

В дисертації розв'язано проблему Степпа, а саме, побудовано приклад H-замкненої але не абсолютно H-замкненої топологічної напівгратки. Доведено, що для довільного кардиналу λ локально компактний напівтопологічний λ-поліциклічний моноїд є або компактним, або дискретним простором. Показано, що λ-поліциклічний моноїд не вкладається в зліченно компактну топологічну напівгрупу, і вказано достатні умови для того, щоб λ-поліциклічний моноїд був абсолютно H-замкненим у класі топологічних інверсних напівгруп. Доведено, що для довільного ординалу $\alpha<\omega+1$ єдиною локально компактною напівгруповою топологією на α-біциклічному моноїді є дискретна топологія та побудовано приклад недискретної локально компактної топології τ на $\omega+1$-біциклічному моноїді такої, що $(\mathfrak{B}_{\omega+1},\tau)$ є топологічною інверсною напівгрупою. Цей приклад показує, що теорема 2.9 з [86], в якій стверджувалось, що для довільного ординалу α єдиною локально компактною напівгруповою топологією на α-біциклічному моноїді є дискретна топологія – невірна.

В даний час у вище перелічених напрямках працюють такі математики: А. О. Архангельскій (Москва, Росія), Т. О. Банах (Львівський НУ), В. М. Гаврилків (Прикарпатський НУ), І. Й. Гуран (Львівський НУ), О. В. Гутік (Львівський НУ), Ф. Лін (Minam Normal Univ., Китай), Дж. Лоусон (Louisiana State Univ., США), М. Морайне (Politechnika Wroclawska, Польща), І. В. Протасов (Київський НУ), О. В. Равський (ІППММ НАН України), М. Г. Ткаченко (Metropolitan Autonomous University Mexico City, Distrito Federal, Mexico), М. М. Чобан (Кишинів, Молдова), Є. Г. Зеленюк (University of the Witwatersrand, ПАР), та інші.

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є розв'язок проблеми Степпа, а також вивчення властивостей λ-поліциклічного й α-біциклічного моноїдів як топологічних і напівтопологічних напівгруп.

Для досягнення поставленої мети в дисертації потрібно розв'язати наступні задачі:

1) побудувати приклад H-замкненої гаусдорфової топологічної напівгратки, яка не є абсолютно H-замкненою;
2) дослідити топологізацію λ-поліциклічного і α-біциклічного моноїдів, зокрема описати гаусдорфові локально компактні топології, що перетворюють λ-поліциклічний і α-біциклічний моноїди в топологічні (напівтопологічні) напівгрупи;
3) дослідити вкладення λ-поліциклічного моноїда в близькі до компактних топологічні напівгрупи;
4) описати замикання λ-поліциклічного моноїда в топологічній інверсній напівгрупі, зокрема вказати умови за яких λ-поліциклічний моноїд є абсолютно H-замкненим в класі топологічних інверсних напівгруп.

Об'єктом дослідження є топологічні напівгратки, λ-поліциклічний і α-біциклічний моноїди, а *предметом* досліджень – H-замкненість і абсолютна H-замкненість топологічних напівграток і λ-поліциклічного моноїда, а також топологізація λ-поліциклічного та α-біциклічного моноїдів.

Методи дослідження. У процесі вивчення дисертаційних задач застосовуються методи загальної топології, топологічної алгебри та алгебраїчної теорії напівгруп.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати отримані в дисертаційній роботі є новими.

Основні наукові результатами, що виносяться на захист:

1. Розв'язано проблему Степпа (питання 17 з [120]), а саме, побудовано приклад H-замкненої але не абсолютно H-замкненої топологічної напівгратки. Більше того, для довільного нескінченного кардиналу λ побудовано приклад H-замкненої топологічної напівгратки, яка допускає 2^λ неперервних відкрито-замкнених гомоморфних образів, які не є H-замкненими топологічними напівгратками.
2. Доведено, що локально компактний напівтопологічний λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ є або дискретним, або компактним простором.
3. Доведено, що для довільного кардиналу $\lambda > 1$, λ-поліциклічний моноїд не вкладається як щільна піднапівгрупа в слабко компактну топологічну напівгрупу.
4. Вказано достатні умови за виконання яких топологічний інверсний λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ є абсолютно H-замкненою напівгрупою в класі топологічних інверсних напівгруп.
5. Показано, що для довільного ординалу $\alpha < \omega + 1$ довільна локально компактна напівгрупова топологія на моноїді $\mathfrak{B}_\alpha$ є дискретною і побудовано приклад недискретної локально компактної топології τ_{lc} на моноїді $\mathfrak{B}_{\omega+1}$ такої, що $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$ є топологічною інверсною

напівгрупою.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Зі статей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включені лише ті результати, що належать автору.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися на наукових конференціях та наукових семінарах:

1) семінар з топологічної алгебри у Львівському національному університеті імені Івана Франка. Львів, 2012, 2014, 2015, 2016 р.;
2) міжнародна конференція присвячена 120-річчю з дня народження Стефана Банаха, Львів, 17–21 вересня 2012 р.;
3) дев'ята міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, Львів, 8–13 липня 2013 р.;
4) семінар з топологічної алгебри в університеті міста Градець Кралове, Чехія, вересень 2014 р.;
5) X Літня школа "Алгебра, Топологія, Аналіз", Одеса, 3–15 серпня 2015 р.;
6) семінар "Топологія і застосування" у Львівському національному університеті імені Івана Франка. Львів, 2015, 2016 р.;
7) міжнародна конференція "Геометрія і топологія в Одесі", Одеса, 2–8 червня 2016 р.;
8) 7-ий європейський математичний конгрес, Берлін, 18-22 липня 2016р.;
9) XI Літня школа "Алгебра, Топологія, Аналіз", Одеса, 1–14 серпня 2016 р.;
10) міжнародна конференція присвячена 120-річчю з дня народження Казіміра Куратовського, Львів, 27 вересня –1 жовтня 2016 р.;
11) семінар з абстрактного аналізу в Політехнічному університеті міста Лодзь, Польща, жовтень 2016 р.;

12) Зимова школа з абстрактного аналізу, Хейніце, Чехія, 28 січня – 4 лютого 2017 р.

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається з аннотації (двома мовами), вступу, трьох розділів, висновків, списку літератури та одного додатку. Повний обсяг роботи – 130 сторінок.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі геометрії і топології Львівського національного університету імені Івана Франка. Результати дисертації частково використані при виконанні завдань держбюджетної теми "Топологія та її застосування у фрактальній геометрії та математичній економіці"(номер державної реєстрації 0116U001537).

Подяка. Автор висловлює глибоку подяку своєму науковому керівнику, кандидату фізико-математичних наук, доценту кафедри геометрії і топології Львівського національного університету імені Івана Франка Олегу Володимировичу Гутіку, і доктору фізико-математичних наук, завідувачу кафедри геометрії і топології Львівського національного університету імені Івана Франка, професору Тарасу Онуфрійовичу Банаху за постійну підтримку й плодотворні математичні дискусії.

Означення і допоміжні твердження

В цьому розділі наведено означення та допоміжні твердження, які згадуються у тексті дисертаційної роботи. Ми використовуватимо термінологію, означення та позначення такі, як у монографіях [9,42,47,59,99,111,114].

У дисертаційній роботі великими латинськими літерами позначаються множини та топологічні простори, а малими – їх елементи. Через $\mathbb{N}$ позначаємо множину натуральних чисел. Усі топологічні простори, якщо не зазначено інше, вважаються гаусдорфовими.

Множини X та Y називаються *рівнопотужними*, якщо існує взаємно однозначне відображення множини X на Y. У цьому випадку пишемо $|X| = |Y|$, де $|X|$ – найменший ординал рівнопотужний множині X. Такі ординали називають *кардиналами (кардинальними числами)* або *потужністю множини* X. Через ω будемо позначати найменший нескінченний ординал. Якщо $f : X \to Y$ – відображення з множини X у множину Y, то образ елемента $x \in X$ при відображенні f позначаємо через $(x)f$. Через 2^X позначатимемо множину всіх підмножин непорожньої множини X.

Фільтром $\mathcal{F}$ на множині X називається підмножина 2^X, яка задовільняє наступні умови:

1) $\varnothing \notin \mathcal{F}$;
2) якщо $A \in \mathcal{F}$ і $A \subset B$, то $B \in \mathcal{F}$;
3) якщо $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Базою фільтра $\mathcal{F}$ називається підмножина $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$, яка задовольняє умову: для довільного елемента $A \in \mathcal{F}$ існує елемент $B \in \mathcal{B}$ такий, що $B \subset A$.

Відношенням (або *бінарним відношенням*) на множині X називається підмножина декартового добутку $\rho \subseteq X \times X$. Якщо елементи x та y є у відношенні ρ, то будемо це записувати так: $(x, y) \in \rho$ або $x\rho y$.

Відношення ρ на множині X називається *відношенням еквівалентно-*

сті, якщо виконуються наступні умови:

(1) $x\rho x$ для кожного $x \in X$;

(2) якщо $x\rho y$, то $y\rho x$, для $x, y \in X$;

(3) якщо $x\rho y$ і $y\rho z$, то $x\rho z$, $x, y, z \in X$.

Нехай ρ – відношення еквівалентності на множині X . Тоді ρ розбиває множину X на диз'юнктні класи еквівалентності за відношенням ρ:

$$[x]_\rho = \{y \in X|\, y\rho x\}$$

Множина, елементами якої є класи еквівалентності множини X за відношенням еквівалентності ρ, називається *фактор-множиною множини X за відношенням ρ* та позначається X/ρ. Відображення $\rho\colon X \to X/\rho$ означене $f(x) = [x]_\rho$ називається *природним*.

Відношення $\leqslant$ на множині X називається *частковим порядком*, якщо виконуються наступні умови:

(1) $x \leqslant x$ для кожного $x \in X$;

(2) якщо $x \leqslant y$ і $y \leqslant x$, то $x = y$, для $x, y \in X$;

(3) якщо $x \leqslant y$ і $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$, для $x, y, z \in X$.

Множина X із заданим на ній частковим порядком $\leqslant$ називається *частково впорядкованою*, і позначається $(X, \leqslant)$. Елементи x та y частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називаються *порівняльними*, якщо $x \leqslant y$ або $y \leqslant x$; у протилежному випадку елементи x та y називаються *непорівняльними*.

Підмножина A частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називається *лінійно впорядкованою*, якщо довільні два елементи з A є порівняльними. У цьому випадку кажуть, що $(A, \leqslant)$ – *лінійно впорядкована множина* або *ланцюг*, і $\leqslant$ – *лінійний порядок* на A. *Максимальним ланцюгом* частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ є ланцюг, який не міститься як власний підланцюг у жодному іншому ланцюгу з $(X, \leqslant)$. З аксіоми вибору випливає існування максимальних ланцюгів у кожній частково впорядкованій множині. Ланцюг L називається ω-ланцюгом, якщо L порядково ізоморфний множині $\{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ із заданим на ній звичайним порядком $\leqslant$.

Бієктивне відображення $f : (X, \leqslant) \to (Y, \preceq)$ називається порядковим ізоморфізмом, якщо $f(x) \preceq f(y)$ тоді і лише тоді, коли $x \leqslant y$.

Нехай $(X, \leqslant)$ є частково впорядкованою множиною, A є деякою підмножиною X, а x є деяким елементом A. Введемо наступні позначення:

1) ${\downarrow}A = \{y \in X : \text{існує } x \in A \text{ такий, що } y \leqslant x\}$;
2) ${\uparrow}X = \{y \in X : \text{існує } x \in A \text{ такий, що } x \leqslant y\}$;
3) ${\downarrow}x = {\downarrow}\{x\}$;
4) ${\uparrow}x = {\uparrow}\{x\}$;
5) A називається *ідеалом*, якщо $A = {\downarrow}A$;
6) A називається *фільтром*, якщо $A = {\uparrow}A$;
7) A називається *головним ідеалом*, якщо $A = {\downarrow}x$ для деякого елемента $x \in A$;
8) A називається *головним фільтром*, якщо $A = {\uparrow}x$ для деякого елемента $x \in A$.

Орієнтованим графом $E = (E^0, E^1, r, s)$ називається набір, що складається з множини *вершин* E^0, множини *стрілок* E^1 та відображень $s, r : E^1 \to E^0$, які кожній стрілці ставлять у відповідність вершину з якої вона виходить і в яку вона входить, відповідно. Шляхом $x = e_1 \ldots e_n$ в орієнтованому графі E називається така скінченна послідовність стрілок $e_1, \ldots, e_n$, що $r(e_i) = s(e_{i+1})$, для довільного натурального числа $i \leqslant n$. Продовжимо відображення s і r на множину всіх шляхів $\mathrm{Path}(E)$ орієнтованого графа E наступним способом: для довільного елемента $x = e_1 \ldots e_n \in \mathrm{Path}(E)$ покладемо $s(x) = s(e_1)$ і $r(x) = r(e_n)$. Через $|x|$ позначимо довжину шляху x. Стрілка e називається *петлею*, якщо $s(e) = r(e)$.

Напівгрупою називається непорожня множина із заданою на ній бінарною асоціативною операцією.

Непорожня підмножина T напівгрупи S називається *піднапівгрупою* в

S, якщо для довільних елементів a, b з T виконується умова $ab \in T$, і *підгрупою* в S, якщо $aT = Ta = T$ для довільного елемента a з T.

Для довільної підмножини A напівгрупи S через $\langle A \rangle$ позначаємо піднапівгрупу в S породжену множиною A.

Лівим (*правим*) *ідеалом* напівгрупи S називається непорожня підмножина A в S така, що $SA \subseteq A$ ($AS \subseteq A$). *Двобічним ідеалом*, або просто *ідеалом*, називається підмножина напівгрупи, що є лівим і правим ідеалом одночасно. Лівий (правий, двобічний) ідеал називається *головним лівим (правим, двобічним) ідеалом*, якщо він породжується одним елементом.

Елемент a напівгрупи S називається *регулярним*, якщо існує елемент b з S такий, що $aba = a$. Елемент a є регулярним тоді і лише тоді, коли для нього існує інверсний еклемент b такий, що

$$a = aba \qquad \text{і} \qquad b = bab.$$

Напівгрупа S називається *регулярною*, якщо кожен її елемент є регулярним.

Напівгрупа S називається *інверсною*, якщо для кожного елемента x з S існує єдиний інверсний елемент, який ми будем позначати через x^{-1}. Якщо S – інверсна напівгрупа, то відображення $\operatorname{inv}\colon S \to S$, яке ставить у відповідність кожному елементові x інверсної напівгрупи S його інверсний елемент x^{-1}, називається *інверсією.*

Елемент e напівгрупи S називається *ідемпотентом*, якщо $ee = e$. Якщо S – напівгрупа, то підмножину усіх ідемпотентів з S позначатимемо через $E(S)$. Напівгрупа ідемпотентів називається *в'язкою.* Очевидно, що для інверсної напівгрупи S підмножина $E(S)$ в S є в'язкою.

Якщо в'язка E є непорожньою множиною, то напівгрупова операція на в'язці E визначає частковий порядок $\leqslant$ на ній:

$$e \leqslant f \ \text{ тоді і лише тоді, коли } \ ef = fe = e, \qquad \text{для} \qquad e, f \in E.$$

Так визначений порядок на E називається *природним. Напівгратка* – це комутативна напівгрупа ідемпотентів. Напівгратка E називається *лінійно впорядкованою* або *ланцюгом*, якщо напівгрупова операція індукує на E лінійний природний порядок.

Теорема 1 ([47, теорема 1.17]). *Нехай S – напівгрупа, тоді наступні умови є еквівалентними:*

(*i*) *S – регулярна і будь-які два її ідемпотенти комутують;*

(*ii*) *кожен головний лівий (правий) ідеал напівгрупи S породжується єдиним ідемпотентом;*

(*iii*) *S – інверсна напівгрупа.*

Нехай S і T – напівгрупи. Відображення ϕ: $S \to T$ називається *гомоморфізмом*, якщо виконується умова $(x \cdot y)\phi = (x)\phi \cdot (y)\phi$, для всіх $x, y \in S$. Бієктивний гомоморфізм ϕ напівгрупи S на напівгрупу T називається *ізоморфізмом.*

Напівгруповий гомоморфізм h з напівгрупи S у напівгрупу T називається *анулюючим*, якщо існує елемент c в T такий, що $(a)h = c$ для всіх $a \in S$.

Лема 2 ([47, лема 7.34]). *Нехай φ: $S \to S'$ – гомоморфізм інверсної напівгрупи S на S' і e' – ідемпотент з S'. Тоді $(e')\varphi^{-1}$ є інверсною піднапівгрупою в S.*

Теорема 3 ([47, теорема 7.36]). *Гомоморфний образ інверсної напівгрупи є інверсною напівгрупою. Більше того, при будь-якому гомоморфізмі елемент, інверсний до даного, відображається на елемент, інверсний до образу даного елемента.*

Відношення ρ на напівгрупі S називається *стабільним справа* (*зліва*), якщо з того, що $a\rho b$ $(a, b \in S)$ випливає, що $ac\rho bc$ $(ca\rho cb)$, для кожного $c \in S$. *Конгруенцією* на напівгрупі S називається відношення еквівалентності, яке є стабільним справа та зліва одночасно.

Зауважимо, якщо ρ – довільна конгруенція на напівгрупі S, то фактор-множина S/ρ є напівгрупою. Через $\Omega(S)$ та $\Delta(S)$ позначатимемо *універсальну* та *одиничну* конгруенції, відповідно, на напівгрупі S, тобто,

$$\Omega(S) = S \times S \qquad \text{і} \qquad \Delta(S) = \{(s, s) \mid s \in S\}.$$

Конгруенція ρ на напівгрупі S називається *нетривіальною*, якщо ρ відрізняється від універсальної та одиничної конгруенцій на S, і *груповою*, якщо фактор-напівгрупа S/ρ є групою.

Лема 4 ([111, лема III.1.1]). *Нехай ρ – конгруенція на інверсній напівгрупі S і $x, y \in S$. Тоді з того, що $x\rho y$ випливає, що $x^{-1}\rho y^{-1}$.*

Кожна когруенція ρ на напівгрупі S породжує природній гомоморфізм $\pi_\rho \colon S \to S/\rho$, і кожен сюр'єктивний гомоморфізм $h \colon S \to T$ напівгрупи S на напівгрупу T породжує конгруенцію ρ на S, яка визначається наступним чином:

$$a\rho b \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad (a)h = (b)h$$

Якщо на напівгрупі S задано відношення ρ, то через $\rho^\natural$ ми позначатимемо найменшу конгруенцію, що містить відношення ρ.

Нехай S – напівгрупа, тоді через S^1 ми позначатимемо S якщо S містить одиницю і $S \cup \{1\}$, якщо S не містить одиниці.

Для довільної напівгрупи S через $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{D}$ та $\mathscr{H}$ ми позначимо відношення Гріна на S (див. [60] або [47, Розділ 2.1]):

$$a\mathscr{R}b \quad \text{тоді і тільки тоді, коли} \quad aS^1 = bS^1;$$
$$a\mathscr{L}b \quad \text{тоді і тільки тоді, коли} \quad S^1a = S^1b;$$
$$a\mathscr{J}b \quad \text{тоді і тільки тоді, коли} \quad S^1aS^1 = S^1bS^1;$$
$$\mathscr{D} = \mathscr{L}\circ\mathscr{R} = \mathscr{R}\circ\mathscr{L};$$
$$\mathscr{H} = \mathscr{L} \cap \mathscr{R}.$$

Якщо a – елемент напівгрупи S, то через L_a, R_a, D_a, H_a та J_a будемо позначати, відповідно, $\mathscr{L}$–, $\mathscr{R}$–, $\mathscr{D}$–, $\mathscr{H}$– та $\mathscr{J}$–клас напівгрупи S, що містить елемент a.

Твердження 5 ([99, твердження 3.2.11]). *Нехай S є інверсною піднапівгрупою в інверсній напівгрупі T і $\mathscr{L}(T)$ (відп. $\mathscr{L}(S)$), $\mathscr{R}(T)$ (відп. $\mathscr{R}(S)$), $\mathscr{H}(T)$ (відп. $\mathscr{H}(S)$), $\mathscr{D}(T)$ (відп. $\mathscr{D}(S)$), $\mathscr{J}(T)$ (відп. $\mathscr{J}(S)$) є відношеннями $\mathscr{L}, \mathscr{R}, \mathscr{H}, \mathscr{D}, \mathscr{J}$ на напівгрупі T (відп. S). Тоді виконуються наступні умови:*

1) $\mathscr{L}(T) \cap S \times S = \mathscr{L}(S)$;
2) $\mathscr{R}(T) \cap S \times S = \mathscr{R}(S)$;
3) $\mathscr{H}(T) \cap S \times S = \mathscr{H}(S)$;
4) $\mathscr{D}(S) \subseteq \mathscr{D}(T) \cap S \times S$;
5) $\mathscr{J}(S) \subseteq \mathscr{J}(T) \cap S \times S$.

Теорема 6 ([47, теорема 2.16]). *Якщо елементи a, b, ab належать одному і тому самому $\mathscr{H}$-класу G напівгрупи S, то G є підгрупою в S. Зокрема, всі $\mathscr{H}$-класи, що містять ідемпотент є підгрупами в S.*

Теорема 7 ([76, теорема 1.2.7]). *Два $\mathscr{H}$-класи, що містять по ідемпотенту та лежать в одному $\mathscr{D}$-класі напівгрупи S є ізоморфними підгрупами в S.*

Напівгрупа S називається:

- *простою*, якщо S не містить власного двобічного ідеалу, що еквівалентно тому, що $\mathscr{J} = S \times S$;
- 0-*простою*, якщо S містить нуль і S не містить власного двобічного ідеалу відмінного від нуля;
- *біпростою*, якщо S містить єдиний $\mathscr{D}$-клас, тобто, $\mathscr{D} = S \times S$;
- 0-*біпростою*, якщо S є напівгрупою з нулем і S містить лише два $\mathscr{D}$-класи: $\{0\}$ та $S \setminus \{0\}$;
- *конгруенц-простою*, якщо на S є лише одинична й універсальна конгруенції.

Інверсна напівгрупа S називається

- *комбінаторною*, якщо $\mathscr{H}$ є відношенням рівності на S;

- *E-унітарною*, якщо для довільних ідемпотентів $e, f \in S$ з рівності $ex = f$ випливає, що $x \in E(S)$;
- 0-*E-унітарною*, якщо S містить нуль і для довільних ненульових ідемпотентів $e, f \in S$ з рівності $ex = f$ випливає, що $x \in E(S)$.

Теорема 8 ([47, теорема 2.3]). *Нехай a та c – довільні $\mathscr{D}$-еквівалентні елементи напівгрупи S. Тоді існує такий елемент $b \in S$, що $a\mathscr{R}b$ і $b\mathscr{L}c$, а отже*

$$as = b, \qquad bs' = a, \qquad tb = c, \qquad t'c = b$$

для деяких $s, s', t, t' \in S^1$. Відображення

$$x \mapsto txs \ (x \in H_a) \qquad \text{та} \qquad z \mapsto t'zs' \ (z \in H_c)$$

взаємообернені і взаємооднозначно відображають класи H_a та H_c. Зокрема, два $\mathscr{H}$-класи, що лежать в одному $\mathscr{D}$-класі є рівнопотужними.

Теорема 9 ([47, теорема 2.20]). *Нехай e та f – деякі $\mathscr{D}$-еквівалентні ідемпотенти напівгрупи S. Нехай a – довільний, але фіксований елемент з $R_e \cap L_f$, і нехай a' – інверсний елемент до a з $R_f \cap L_e$. Тоді відображення $x \mapsto a'xa$ та $y \mapsto aya'$ є взаємооберненими ізоморфізмами H_e на H_f і H_f на H_e, відповідно.*

Твердження 10 ([99, твердження 3.2.5(1)]). *Нехай S – інверсна напівгрупа. Тоді для довільних $e, f \in E(S)$ з того, що $e\mathscr{D}f$ випливає, що існує такий елемент $x \in S$, що $xx^{-1} = e$ й $x^{-1}x = f$.*

Біциклічним моноїдом (*біциклічною напівгрупою*) називається напівгрупа $\mathcal{C}(p,q)$ з одиницею 1 породжена двома елементами p та q, що задовільняють умову $pq = 1$. Біциклічна напівгрупа ізоморфна множині $\mathfrak{B}_1 = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ з визначеною на ній такою напівгруповою операцією:

$$(a,b)\cdot(c,d) = \begin{cases} (a+c-b, d), & \text{якщо} \ \ b \leqslant c; \\ (a, d+b-c), & \text{якщо} \ \ b > c. \end{cases}$$

Добре відомо, що біциклічний моноїд $\mathcal{C}(p,q)$ є біпростою (а отже, простою) комбінаторною E-унітарною інверсною напівгрупою і довільна неодинична конгруенція на $\mathcal{C}(p,q)$ є груповою [47].

Лема 11 ([47, лема 1.31]). *Нехай e, a, b – елементи напівгрупи S такі, що*

$$ea = ae = a, eb = be = b, ab = e \qquad i \qquad ba \neq e.$$

Тоді кожен елемент піднапівгрупи $\langle a, b\rangle$ з S, породженої елементами a та b, єдиним чином зображається в вигляді $b^m a^n$, де m та n – невід'ємні цілі числа (і $a^0 = b^0 = e$), а отже напівгрупа $\langle a, b\rangle$ ізоморфна біциклічній напівгрупі $\mathcal{C}(p,q)$.

Нехай λ – довільний ненульовий кардинал. На множині $\mathcal{B}_\lambda = (\lambda\times\lambda)\cup\{0\}$ такій, що $0\notin\lambda\times\lambda$, визначимо напівгрупову операцію "$\cdot$" наступним чином

$$(a,b)\cdot(c,d) = \begin{cases} (a,d), & \text{якщо } \ b = c; \\ 0, & \text{якщо } \ b \neq c, \end{cases}$$

і $(a,b)\cdot 0 = 0\cdot(a,b) = 0\cdot 0 = 0$, для всіх $a,b,c,d\in\lambda$. Напівгрупа $\mathcal{B}_\lambda$ називається *напівгрупою $\lambda\times\lambda$-матричних одиниць* (див. [47]).

Вільною напівгрупою $\mathcal{S}_X$ над множиною X називається множина всіх непорожніх скінчених послідовностей простору X з визначеною на ній наступною напівгруповою операцією:

$$(x_1,..,x_n)\cdot(y_1,..,y_n) = (x_1,..,x_n,y_1,..,y_n).$$

Надалі такі скінчені послідовності будемо називати словами, а їх елементи – літерами. Вільним моноїдом $\mathcal{M}_X$ над множиною X називається вільна напівгрупа $\mathcal{S}_X$ над множиною X з приєднаною одиницею, яку ми будем ототожнювати з порожнім словом. Довжиною слова будем називати кількість літер у даному слові. Довжина порожнього слова дорівнює нулю.

Зауваження 12. Іноді, абстрагуючись від природи множини X, ми ототожнюватимемо множину X з її потужністю $|X|$, та у випадку, коли $|X| = \lambda$, замість $\mathcal{I}_X$ ($\mathcal{M}_X$), будемо використовувати позначення $\mathcal{I}_\lambda$ ($\mathcal{M}_\lambda$).

Для довільного натурального числа n, *поліциклічний моноїд* $\mathcal{P}_n$ є моноїдом з нулем, що визначається наступними співвідношеннями:

$$\mathcal{P}_n = \left\langle \{p_i\}_{i \leqslant n \in \mathbb{N}}, \{p_i^{-1}\}_{i \leqslant n \in \mathbb{N}} \mid p_i p_i^{-1} = 1, p_i p_j^{-1} = 0 \text{ для всіх } i \neq j \right\rangle.$$

Легко бачити, що у випакдку, коли $n = 1$ напівгрупа $\mathcal{P}_1$ ізоморфна біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем. Поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_n$ введений в роботі [107] і є узагальненням біциклічного моноїда (також див. [99, розділ 9.3]).

Теорема 13 ([99, теорема 9.3.4]). *Для довільного натурального числа $n > 1$ поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_n$ є конгруенц-простою комбінаторною 0-біпростою 0-E-унітарною інверсною напівгрупою.*

Нехай $E = (E^0, E^1, r, s)$ – довільний орієнтований граф. Інверсною напівгрупою $G(E)$ над графом E називається напівгрупа з нулем, породжена елементами множин E^0, E^1 та $E^{-1} = \{e^{-1} : e \in E^1\}$ з визначеними на них наступними співвідношеннями:

(i) $a \cdot b = a$, якщо $a = b$ й $a \cdot b = 0$, якщо $a \neq b$;

(ii) $s(e) \cdot e = e \cdot r(e) = e$;

(iii) $e^{-1} \cdot s(e) = r(e) \cdot e^{-1} = e^{-1}$;

(iv) $e \cdot f^{-1} = s(e)$, якщо $e = f$ і $e \cdot f^{-1} = 0$, якщо $e \neq f$,

для всіх елементів $a, b \in E^0$ і $e, f \in E^1$.

Лема 14 ([91, лема 2.6]). *Довільний ненульовий елемент x інверсної напівгрупи $G(E)$ над довільним орієнтованим графом E має вигляд $u^{-1}v$, де u та v є такими елементами з $\mathrm{Path}(E)$, що $s(u) = s(v)$, і напівгрупова* *операція на $G(E)$ в цьому зображенні визначена наступним способом:*

$$a^{-1}b\cdot c^{-1}d=\begin{cases}(c_1a)^{-1}d, & \textit{якщо}\;\; c=c_1b \quad \textit{для деякого}\; c_1\in \mathrm{Path}(E);\\ a^{-1}b_1d, & \textit{якщо}\;\; b=b_1c \quad \textit{для деякого}\; b_1\in \mathrm{Path}(E);\\ 0, & \textit{в іншому випадку},\end{cases}$$

і $\quad a^{-1}b\cdot 0=0\cdot a^{-1}b=0\cdot 0=0.$

Зауважимо, що n-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_n$ є інверсною напівгрупою над орієнтованим графом E, що складається з однієї вершини та n петель, множину шляхів якого можна ототожнити з вільним моноїдом $\mathcal{M}_n$ над n-елементною множиною. А тому з леми 14 випливає наступний наслідок.

Наслідок 15. *Довільний ненульовий елемент $x\in\mathcal{P}_n$ має вигляд $u^{-1}v$, де u та v є елементами вільного моноїда $\mathcal{M}_n$ над n-елементною множиною, і напівгрупова операція на $\mathcal{P}_n$ в цьому зображенні визначена наступним чином:*

$$a^{-1}b\cdot c^{-1}d=\begin{cases}(c_1a)^{-1}d, & \textit{якщо}\;\; c=c_1b, \quad \textit{де}\; c_1\in \mathcal{M}_\lambda;\\ a^{-1}b_1d, & \textit{якщо}\;\; b=b_1c, \quad \textit{де}\; b_1\in \mathcal{M}_\lambda;\\ 0, & \textit{в іншому випадку}\end{cases} \tag{1}$$

і $\quad a^{-1}b\cdot 0=0\cdot a^{-1}b=0\cdot 0=0.$

Нехай α – довільний ординал. Через $<$ позначимо звичайний порядок на α, тобто $a<b$ тоді і тільки тоді, коли $a\in b$, для довільних $a,b\in\alpha$. Покладемо $a\leqslant b$, якщо $a=b$ або $a\in b$. Легко бачити, що $\leqslant$ є частковим порядком на α. Через $+$ ми позначимо звичайне додавання ординалів. Ординал α називається *адитивно нерозкладним*, якщо його не можна представити у вигляді суми ординалів, які містяться в α. Для довільних ординалів a,b таких, що $b<a$ покладемо $c=a-b$, якщо $a=b+c$. Очевидно, що у цьому випадку існує єдиний ординал c такий, що $a=b+c$.

Теорема 16 ([132, теорема 17]). *Довільний ординал a однозначним чином розкладається в свою нормальну форму Кантора, тобто $a=$*

$n_1\omega^{\beta_1}+n_2\omega^{\beta_2}+\ldots+n_k\omega^{\beta_k}$, *де* $n_i\in\mathbb{N}$, *а* $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k$ *– спадна послідовність ординалів.*

α-Біциклічним моноїдом (*α-біциклічною напівгрупою*) $\mathfrak{B}_\alpha$ називається множина $\omega^\alpha\times\omega^\alpha$ з визначеною на ній наступною бінарною асоціативною операцією:

$$(a,b)\cdot(c,d)=\begin{cases}(a+(c-b),d), & \text{якщо}\ \ b\leqslant c;\\ (a,d+(b-c)), & \text{якщо}\ \ c<b.\end{cases}$$

α-Біциклічний моноїд вперше введений в роботі [85]. Легко бачити, що він є узагальненням біциклічної напівгрупи. З означення напівгрупи $\mathfrak{B}_\alpha$ випливає, що 1-біциклічний моноїд $\mathfrak{B}_1$ ізоморфний біциклічній напівгрупі.

Нехай X — непорожня множина й $\alpha\colon X\rightharpoonup X$ — часткове відображення (часткове перетворення) множини X. Через $\operatorname{dom}\alpha$ і $\operatorname{ran}\alpha$ позначатимемо *область визначення* та *область значень*, відповідно, часткового перетворення α.

Через $\mathscr{I}_X$ будемо позначати множину всіх часткових ін'єктивних перетворень непорожньої множини X з визначеною на ній напівгруповою операцією:

$$x(\alpha\beta)=(x\alpha)\beta, \qquad \text{якщо} \qquad x\in\operatorname{dom}(\alpha\beta)=\{y\in\operatorname{dom}\alpha\mid y\alpha\in\operatorname{dom}\beta\},$$

для $\alpha,\beta\in\mathscr{I}_X$. Напівгрупа $\mathscr{I}_X$ називається *симетричною інверсною напівгрупою* над множиною X (див. [47]). Симетрична інверсна напівгрупа вперше введена Вагнером [1] і відіграє важливу роль в теорії інверсних напівгруп.

Нехай X – множина та ρ – відношення еквівалентності на X. Тоді через $\langle X:\rho\rangle$ позначатимемо фактор-напівгрупу $S_X/\rho^\natural$.

Твердження 17 ([99, твердження 2.3.5]). *Нехай* $A=\{a_i:i\in I\}$ *– множина породжуючих елементів напівгрупи* T *і множина* $X=\{x_i:i\in I\}$ *рівнопотужна множині* A. *Нехай* ρ *– відношення на вільній напівгрупі*

S_X, породжене відображенням $\theta : S_X \to T$, $\theta(x_i) = a_i$ для всіх $i \in I$. Тоді T є гомоморфним образом напівгрупи $\langle X : \rho\rangle$.

Якщо Y – підмножина топологічного простору X то через $\mathrm{cl}_X(Y)$ та $\mathrm{int}_X(Y)$ позначатимемо замикання та внутрішність множини Y в топологічному просторі X, відповідно.

Топологічний простір X називається:

- *T_0-простором*, якщо для кожної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита підмножина U в X така, що U містить рівно одну з цих точок;
- *T_1 -простором*, якщо для кожної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує відкрита підмножина U в X така, що $x_1 \in U$ і $x_2 \notin U$.
- *T_2-простором (або гаусдорфовим простором)*, якщо для кожної пари різних точок $x_1, x_2 \in X$ існують відкриті підмножини U_1, U_2 в X такі, що $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ й $U_1 \cap U_2 = \varnothing$;
- *T_3-простором*, або *регулярним простором*, якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ і довільної замкненої підмножини F в X такої, що $x \notin F$, існують відкриті підмножини U_1, U_2 в X такі, що $x_1 \in U_1$, $F \subset U_2$ й $U_1 \cap U_2 = \varnothing$;
- *$T_{3\frac{1}{2}}$-простором* (*тихоновським* або *цілком регулярним простором*), якщо X є T_1-простором і для довільної точки $x \in X$ та довільної замкненої підмножини $F \subset X$ такої, що $x \notin F$, існує неперервна функція $f\colon X \to [0, 1]$ така, що $f(x) = 0$ і $f(y) = 1$, для $y \in F$.

Неперервне відображення $f\colon X \to Y$ топологічних просторів X та Y називають *гомеоморфізмом*, якщо f взаємно однозначно відображає X на Y і обернене відображення $f^{-1}\colon Y \to X$ є неперервним. Під *вкладенням* (*зануренням*) топологічного простору X у топологічний простір Y будемо розуміти гомеоморфізм з простору X у простір Y, тобто на образ $f(X)$.

Підмножина A топологічного простору X називається *щільною* в X, якщо $cl_X(A) = X$. Підмножина A топологічного простору X називається *ніде не щільною* в X, якщо її замикання – кощільне в X, що еквівалентно тому, що $cl_X(A)$ має порожню внутрішність в X.

Сім'я $\mathscr{B}(x)$ околів точки x топологічного простору (X, τ) називається *базою в точці* x, якщо для довільного відкритого околу V точки x існує елемент U сім'ї $\mathscr{B}(x)$ такий, що $x \in U \subset V$.

Точка x називається *ізольованою* в топологічному просторі X, якщо $\{x\}$ є відкритою підмножиною в X.

Точка x називається *точкою накопичення* підмножини A в топологічному просторі X, якщо кожен відкритий окіл точки x містить нескінченну кількість елементів з множини A.

Покриттям множини X називається сім'я $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ підмножин в X така, що $\bigcup\limits_{s \in S} A_s = X$. Підсім'я $\mathcal{A}_0$ в $\mathcal{A}$ називається *підпокриттям* множини X, якщо $\mathcal{A}_0$ – покриття множини X. У випадку, коли X – топологічний простір, сім'ю $\mathcal{A} = \{A_s\}_{s \in S}$ називають *відкритим покриттям* простору X, якщо всі елементи сім'ї $\mathcal{A}$ є відкритими підмножинами в X.

Сім'я $\{A_s\}_{s \in S}$ підмножин топологічного простору X називається *локально скінченною*, якщо для довільного елемента x з X існує відкритий окіл U точки x такий, що множина $\{s \in S : U \cap A_s \neq \varnothing\}$ – скінченна.

Топологічний простір X називається:

- *компактним*, якщо довільне його відкрите покриття містить скінченне підпокриття;
- *зліченно компактним*, якщо кожне зліченне відкрите покриття простору X містить скінченне підпокриття;
- *зліченно компактним в множині* $A \subseteq X$, якщо кожна нескінченна підмножина $B \subseteq A$ містить точку накопичення в X;
- *зліченно пракомпактним*, якщо існує щільна в X множина A, така що X є зліченно компактним в A;

- *слабко компактний*, якщо кожне локально-скінченне відкрите покриття простору X є скінченним;
- *локально компактним*, якщо для кожного елемента x в X існує відкритий окіл $U(x)$ такий, що $\mathrm{cl}_X(U(x))$ є компактним підпростором в X;
- *псевдокомпактним*, якщо X є цілком регулярним і кожна неперервна дійснозначна функція на X є обмеженою;
- *берівським*, якщо для кожної послідовності $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ ніде не щільних множин з X об'єднання $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ є кощільною підмножиною в X;
- *H-замкненим*, якщо X є замкенинм підпростором кожного гаусдорфового топологічного простору, що містить його як підпростір.

Кожен компактний простір є зліченно компактним, кожен зліченно компактний простір є зліченно пракомпактний, і кожен зліченно пракомпактний простір є слабко компактним (див. [14] або [9]). Також кожен компактний простір є H-замкненим простором, а кожен H-замкнений простір є слабко компактним простором ([69, твердження 2.25]).

Теорема 18 ([9, теорема 3.10.22]). *Тихонівський топологічний простір X є слабко компактним тоді і тільки тоді, коли X є псевдокомпактним простором.*

Теорема 19 ([9, теорема 3.2.4]). *Тихоновський добуток $\prod\limits_{s\in S} X_s$, де $X_s \neq \varnothing$, $s \in S$, є компактним простором тоді і лише тоді, коли всі простори X_s є компактними.*

Теорема 20 ([9, теорема 3.10.4]). *Кожен замкнений підпростір зліченно компактного простору є зліченно компактним.*

Нехай X – топологічний простір. Пара (Y, c), де Y – компакт, а $c\colon X \to Y$ – гомеоморфне вкладення простору X в Y таке, що $\mathrm{cl}_Y(c(X)) = Y$ називається *компактифікацією* простору X і позначається cX. Простір X

має компактифікацію тоді і тільки тоді, коли він тихоновський. Множина $cX\backslash c(X)$ називається *наростом компактифікації* cX.

Означимо частковий порядок на $\mathscr{C}(X)$ – сім'ї всіх компактифікацій тихонівського простору X таким чином: $c_2X \leqslant c_1X$, якщо існує неперервне відображення $f\colon c_1X \to c_2X$ таке, що $fc_1 = c_2$. Найбільший елемент сім'ї $\mathscr{C}(X)$ називається *стоун-чехівською* компактифікацією простору X і позначається через βX.

Теорема 21 ([9, теорема 3.3.9]). *Якщо X – локально компактний підпростір гаусдорфового простору Y, то X – відкритий підпростір в* $\mathrm{cl}_Y(X)$.

Наслідок 22 ([9, наслідок 3.3.10]). *Підпростір M гаусдорфового локально компактного простору X є локально компактним тоді і тільки тоді, коли $M = F \cap V$, де F є замкненою підмножиною в X, а V є відкритою підмножиною в X.*

Топологічною (*інверсною*) *напівгрупою* називається гаусдорфовий топологічний простір з визначеною на ньому неперервною асоціативною операцією (та інверсією, відповідно). Якщо S є напівгрупою (інверсною напівгрупою) і τ є топологією на S, що перетворює S в топологічну (інверсну) напівгрупу, тоді ми називатимемо τ (*інверсною*) *напівгруповою топологією* на S. *Напівтопологічною напівгрупою* називається гаусдорфовий топологічний простір з визначеною на ньому нарізно неперервною напівгруповою операцією.

Нехай S і T – топологічні напівгрупи. Відображення $\phi\colon S \to T$ називається *топологічним ізоморфізмом*, якщо ϕ є одночасно ізоморфізмом напівгруп S і T та гомеоморфізмів топологічних просторів S і T.

Топологічним вкладенням (*зануренням*) топологічної напівгрупи S у топологічну напівгрупу T називається топологічний ізоморфізм напівгрупи S у напівгрупу T.

Твердження 23 ([114, твердження I-1.8(ii)]). *Нехай X – піднапівгрупа напівтопологічної напівгрупи Y, то $\mathrm{cl}_Y(X)$ – піднапівгрупа в Y.*

Теорема 24 ([72, лема 1]). *Нехай L – лінійно впорядкована топологічна напівгратка, яка міститься в гаусдорфовій топологічній напівгратці S. Тоді $\mathrm{cl}_S(L)$ є лінійно впорядкованою піднапівграткою в S.*

Теорема 25 ([66, наслідок 19]). *Нехай L – топологічна напівгратка, яка міститься в гаусдорфовій топологічній напівгрупі S. Тоді $\mathrm{cl}_S(L)$ є топологічною піднапівграткою в S.*

Гаусдорфова топологічна (інверсна) напівгрупа (S,τ) називається *мінімальною*, якщо не існує гаусдорфовою (інверсної) напівгрупової топології на S, що строго міститься в τ. Якщо (S,τ) є мінімальною топологічною (інверсною) напівгрупою, то τ називатимемо мінімальною (інверсною) напівгруповою топологією.

Теорема 26 ([16, теорема 1.3]). *Для кожної топологічної напівгрупи S такої, що $S\times S$ є псевдокомпактним простором напівгрупова операція $S\times S\to S$ продовжується до неперервної напівгрупової операції $\beta S\times\beta S\to\beta S$.*

Твердження 27 ([53, твердження II.1]). *Якщо X – топологічна інверсна напівгрупа, то інверсія є гомеоморфізмом на X.*

Твердження 28 ([53, твердження II.3]). *Якщо Y – щільна інверсна піднапівгрупа в топологічній інверсній напівгрупі X, то напівгратка $E(Y)$ щільна в напівгратці $E(X)$.*

Нехай $\mathscr{A}$ – деякий клас напівтопологічних напівгруп. Напівгрупа $S\in\mathscr{A}$ називається *H-замкненою в* класі $\mathscr{A}$, якщо S є замкненою піднапівгрупою довільної напівтопологічної напівгрупи $T\in\mathscr{A}$, яка містить S. Топологічна напівгрупа $S\in\mathscr{A}$ називається *абсолютно H-замкненою в класі* $\mathscr{A}$, якщо довільний неперервний гомоморфний образ S є H-замкненим в $\mathscr{A}$. У випадку, коли зрозуміло про який клас $\mathscr{A}$ напівтопологічних напівгруп йдеться, ми писатимемо, замість S є H-замкненою в класі $\mathscr{A}$, що S є H-замкненою.

Теорема 29 ([72, теорема 2]). *Лінійно впорядкована топологічна напівгратка E є H-замкненою тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

(i) *E є повною;*

(ii) *з того, що $x = \sup A$, де $A = {\downarrow}A$, випливає, що $x \in \operatorname{cl}_E A$;*

(iii) *з того, що $x = \inf B$, де $B = {\uparrow}B$, випливає, що $x \in \operatorname{cl}_E B$.*

Теорема 30 ([72, теорема 3]). *Нехай L – лінійно впорядкована H-замкнена топологічна напівгратка. Тоді L є абсолютно H-замкненою топологічною напівграткою.*

Теорема 31 ([120, теорема 9]). *Нехай T – дискретна напівгратка. Тоді T є абсолютно H-замкненою в класі всіх гаусдорфових топологічних напівграток тоді і тільки тоді, коли кожен максимальний ланцюг в T є скінченним.*

Теорема 32 ([62, теорема 1]). *Локально компактний напівтопологічний біциклічний моноїд з приєднаним нулем є або дискретним або компактним простором.*

Наслідок 33 ([62, наслідок 1]). *Єдиною локально компактною напівгруповою топологією на біциклічному моноїді з приєднаним нулем є дискретна топологія.*

Лема 34 ([42, лема 3.12]). *Нехай S – локально компактна топологічна напівгрупа з непорожнім компактним мінімальним ідеалом $M(S)$. Тоді для довільною відкритої множини V, що містить $M(S)$ існує відкрита множина J така, що $M(S) \subset J \subset V$ і J є ідеалом в $\operatorname{cl}_S(J)$.*

Лема 35 ([67, лема 2]). *Довільний ненульовий елемент гаусдорфової напівтопологічної напівгрупи матричних одиниць є ізольованою точкою в ній.*

Твердження 36 ([67, твердження 1]). *Не існує напівгрупової слабко компактної топології на нескінченній напівгрупі матричних одиниць.*

Теорема 37 ([68, теорема 2.10]). *Нескінченна напівгрупа матричних одиниць не вкладається в зліченно компактну топологічну напівгрупу.*

Теорема 38 ([68, теорема 2.11]). *Кожен неперервний гомоморфізм з нескінченної напівгрупи матричних одиниць в зліченно компактну топологічну напівгрупу є анулюючим.*

Теорема 39 ([68, теорема 3.7]). *Якщо підмножина ідемпотентів топологічної напівгрупи матричних одиниць $\mathcal{B}_\lambda$ є компактною, тоді $\mathcal{B}_\lambda$ є абсолютно H-замкненою в класі всіх топологічних напівгруп.*

РОЗДІЛ 1
H-ЗАМКНЕНІ ТОПОЛОГІЧНІ НАПІВГРАТКИ

1.1. H-поповнення та AH-поповнення топологічних напівграток $(\mathbb{N}, max)$ та $(\mathbb{N}, min)$

H-замкнені та абсолютно H-замкнені топологічні напівгрупи були введені Джеймсом Степпом у статтях [119] і [120], де вони називаються максимальними та абсолютно максимальними, відповідно.

У статті [120] показано, що дискретна топологічна напівгратка E – абсолютно H-замкнена тоді і тільки тоді, коли кожен максимальний ланцюг в E є скінченним. У роботі [66] зауважено, що топологічна напівгратка X є H-замкненою (абсолютно H-замкненою) тоді і тільки тоді, коли X є H-замкненою (абсолютно H-замкненою) топологічною напівгрупою. В статті [72] вивчалися властивості лінійно впорядкованих H-замкнених топологічних напівграток і доведена характеризаційна теорема 29. Також в роботі [72] показано, що кожна лінійна H-замкнена топологічна напівгратка є абсолютно H-замкненою і, що кожна лінійна топологічна напівгратка є щільною піднапівграткою H-замкненої топологічної напівгратки.

Через $(\mathbb{N}, \max)$ і $(\mathbb{N}, \min)$ ми позначатимемо множину натуральних чисел з напівгратковою операцією $\max$ і $\min$, відповідно. Під H-поповненням (AH-поповненням) топологічної напівгратки X ми розумітимемо довільну H-замкнену (абослютно H-замкнену) топологічну напівгратку $\tilde{X}$, яка містить X як щільну піднапівгратку. H-поповнення (AH-поповнення) $\tilde{X}$ топологічної напівгратки X називатимемо універсальним, якщо кожен неперервний гомоморфізм h з X в H-замкнену (абсолютно H-замкнену) топологічну напівгратку Y продовжується до неперервного гомоморфізму $\tilde{h} : \tilde{X} \to Y$.

Нехай $\mathscr{F}$ – довільний вільний фільтр на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$. Розглянемо топологічний простір $\mathbb{N}_{\mathscr{F}} = \mathbb{N} \cup \{\mathscr{F}\}$, в якому всі точки $x \in \mathbb{N}$ є ізольованими, а множини вигляду $F \cup \{\mathscr{F}\}$, де $F \in \mathscr{F}$, утворюють базу топології в точці $\mathscr{F}$. Напівграткова операція min на $\mathbb{N}$ продовжується до неперервної напівграткової операції min на $\mathbb{N}_{\mathscr{F}}$ наступним чином:

$$\min\{n, \mathscr{F}\} = \min\{\mathscr{F}, n\} = n\ ,\ \min\{\mathscr{F}, \mathscr{F}\} = \mathscr{F}.$$

Аналогічно, напівграткова операція max на $\mathbb{N}$ продовжується до неперервної напівграткової операції max на $\mathbb{N}_{\mathscr{F}}$ наступним чином:

$$\max\{n, \mathscr{F}\} = \max\{\mathscr{F}, n\} = \mathscr{F} = \max\{\mathscr{F}, \mathscr{F}\}.$$

Надалі через $\mathbb{N}_{\mathscr{F},\min}$ ($\mathbb{N}_{\mathscr{F},\max}$) будемо позначати топологічний простір $\mathbb{N}_{\mathscr{F}}$ з визначеною на ньому неперервною напівгратковою операцією min (max).

Твердження 1.1.1. *Для довільного вільного фільтра $\mathscr{F}$ на $\mathbb{N}$ топологічні напівгратки $\mathbb{N}_{\mathscr{F},\min}$ та $\mathbb{N}_{\mathscr{F},\max}$ є абсолютно H-замкненими.*

Доведення. Зауважимо, що $\mathbb{N}_{\mathscr{F},\min}$ та $\mathbb{N}_{\mathscr{F},\max}$ є лінійно впорядкованими напівгратками, що задовільняють умови теореми 29. Отже напівгратки $\mathbb{N}_{\mathscr{F},\min}$ та $\mathbb{N}_{\mathscr{F},\max}$ є H-замкненими. Тоді за теоремою 30 маємо, що топологічні напівгратки $\mathbb{N}_{\mathscr{F},\min}$ та $\mathbb{N}_{\mathscr{F},\max}$ є абсолютно H-замкненими. □

Твердження 1.1.2. *Кожне H-поповнення дискретної напівгратки $(\mathbb{N}, \min)$ ($(\mathbb{N}, \max)$) топологічно ізоморфне напівгратці $\mathbb{N}_{\mathscr{F},\min}$ ($\mathbb{N}_{\mathscr{F},\max}$) для деякого вільного фільтру $\mathscr{F}$ на $\mathbb{N}$.*

Доведення. Доведемо це твердження для напівгратки $(\mathbb{N}, \min)$. У випадку напівгратки $(\mathbb{N}, \max)$ доведення є аналогічним.

Нехай S – H-замкнена топологічна напівгратка, яка містить напівгратку $(\mathbb{N}, \min)$ як щільний підпростір. З леми 24 випливає, що S є лінійно впорядкованою і $S \setminus \mathbb{N}$ – одноточкова множина, яку ми позначим через $\{a\}$. Тоді з того, що $(\mathbb{N}, \min)$ є щільною піднапівграткою в S, та з неперервності напівграткової операції в S випливає, що $a \cdot n = n \cdot a = n$ для довільного $n \in \mathbb{N}$. Через $\mathscr{B}(a)$ позначимо фільтр відкритих околів точки a в S. Цей фільтр індукує вільний фільтр

$$\mathscr{F} = \{F \subset \mathbb{N} : F \cup \{a\} \in \mathcal{B}(a)\}$$

на $\mathbb{N}$. Тоді топологічна напівгратка S топологічно ізоморфна напівгратці $\mathbb{N}_{\mathscr{F},\min}$. Топологічний ізоморфізм $f\colon S \to \mathbb{N}_{\mathscr{F},\min}$ визначається наступним чином: $f(a) = \mathscr{F}$ і $f(n) = n$ для довільного $n \in \mathbb{N}$. □

Твердження 1.1.3. *Для дискретних напівграток* $(\mathbb{N}, \min)$ *і* $(\mathbb{N}, \max)$ *не існує універсального AH-поповнення.*

Доведення. Доведемо це твердження для напівгратки $(\mathbb{N}, \max)$. У випадку напівгратки $(\mathbb{N}, \min)$ доведення є аналогічним.

Припустимо, що існує універсальне AH-поповнення S дискретної напівгратки $(\mathbb{N}, \max)$. Тоді, за твердженням 1.1.2, напівгратка S топологічно ізоморфна топологічній напівгратці $\mathbb{N}_{\mathscr{F},\max}$ для деякого вільного фільтру $\mathscr{F}$ на $\mathbb{N}$. Нехай $\mathscr{F}'$ є довільним вільним фільтром на $\mathbb{N}$ таким, що $\mathscr{F}' \not\subset \mathscr{F}$. Тоді тотожнє вкладення

$$\mathrm{id}_{\mathbb{N}}\colon (\mathbb{N}, \max) \to \mathbb{N}_{\mathscr{F}',\max}$$

не продовжується до неперервного гомоморфізму $h\colon \mathbb{N}_{\mathscr{F},\max} \to \mathbb{N}_{\mathscr{F}',\max}$, що суперечить універсальності AH-поповнення S напівгратки $(\mathbb{N}, \max)$. □

1.2. Розв'язок проблеми Степпа

В статті [120] Степп поставив наступну проблему: *чи кожна H-замкнена топологічна напівгратка є абсолютно H-замкненою?* У цьому підрозділі буде дана негативна відповідь на питання Степпа.

Надалі через $E_2 = \{0, 1\}$ позначатимемо дискретну топологічну напівгратку з напівгратковою операцією $\min$. Зафіксуємо довільний вільний фільтр $\mathscr{F}$ на множині натуральних чисел, що містить множину F з нескінченним доповненням $\mathbb{N} \setminus F$. Через $Y_{\min}$ позначимо прямий добуток топологічних напівграток $\mathbb{N}_{\mathscr{F},\min}$ та E_2 з топологією добутку. Тоді, легко бачити, що

$$X_{\mathscr{F},min} = (\mathbb{N}_{\mathscr{F},\min} \times \{0\}) \cup ((\mathbb{N} \setminus F) \times \{1\})$$

є замкненою піднапівграткою в Y_{min}.

Твердження 1.2.1. *$X_{\mathscr{F},min}$ – H-замкнена топологічна напівгратка.*

Доведення. Припустимо протилежне: топологічна напівгратка $X_{\mathscr{F},\min}$ не є H-замкненою. З наслідку 25 випливає, що існує топологічна напівгратка S яка містить $X_{\mathscr{F},\min}$ як власну щільну піднапівгратку. Зафіксуємо довільний елемент $a \in S \setminus X_{\mathscr{F},\min}$. Тоді для довільного відкритого околу $U(a)$ елемента a в S множина $U(a) \cap X_{\mathscr{F},\min}$ є нескінченною. За твердженням 1.1.1 піднапівгратка $\mathbb{N}_{\mathscr{F},\min} \times \{0\}$ напівгратки $X_{\mathscr{F},min}$ є H-замкненою. Тому існує такий відкритий окіл $U(a)$ точки a в S, що

$$U(a) \cap X_{\mathscr{F},min} \subseteq (\mathbb{N} \setminus F) \times \{1\}.$$

Отже множина $U(a) \cap ((\mathbb{N} \setminus F) \times \{1\})$ є нескінченною.

Покажемо, що $a \cdot x = x$ для довільного елемента $x \in X_{\mathscr{F},\min} \setminus \{(\mathscr{F}, 0)\}$. З того, що множина $U(x) \cap ((\mathbb{N} \setminus F) \times \{1\})$ є нескінченною та з неперервності напівграткової операції в $X_{\mathscr{F},\min}$ випливає, що $a \cdot x = x$ для довільного елемента $x \in (\mathbb{N} \setminus F) \times \{1\}$. Зафіксуєм довільний елемент

$$y \in \mathbb{N} \times \{0\} \subset X_{\mathscr{F},\min}.$$

З означення напівграткової операції в $X_{\mathscr{F},\min}$ випливає, що існує елемент $x_y \in (\mathbb{N}\setminus F)\times\{1\}$ такий, що $x_y \cdot y = y$. Звідси випливає, що

$$a\cdot y = a\cdot(x_y\cdot y) = (a\cdot x_y)\cdot y = x_y\cdot y = y.$$

З того, що $(\mathscr{F},0)$ є точкою накопичення множини $\mathbb{N}\times\{0\}$ та з неперервності напівграткої операції випливає, що $a\cdot(\mathscr{F},0) = (\mathscr{F},0)$.

Зафіксуємо відкритий окіл

$$W(\mathscr{F},0) = (F\cup\{\mathscr{F}\})\times\{0\}$$

точки $(\mathscr{F},0)$. Розглянемо добуток $a\cdot(\mathscr{F},0) = (\mathscr{F},0)$. З неперервності напівграткової операції випливає існування таких відкритих околів $U(a)$ та $V(\mathscr{F},0)$ точок a і $(\mathscr{F},0)$ в S, відповідно, що $U(a)\cdot V(\mathscr{F},0)\subset W(\mathscr{F},0)$. Зафіксуємо довільну точку

$$(n,1)\in U(a)\cap\big((\mathbb{N}\setminus F)\times\{1\}\big)$$

і знайдемо таку точку $(m,0)\in V(\mathscr{F},0)$, що $m\geqslant n$. Тоді

$$(n,0) = (n,1)\cdot(m,0)\in U(a)\cdot U(\mathscr{F},0)\subset W(\mathscr{F},0) = (F\cup\{\mathscr{F}\})\times\{0\},$$

що суперечить вибору числа $n\in\mathbb{N}\setminus F$. □

Твердження 1.2.2. *Топологічна напівгратка $X_{\mathscr{F},\min}$ не є абсолютно H-замкненою.*

Доведення. З означення напівгратки $X_{\mathscr{F},\min}$ випливає, що множина $I = \mathbb{N}_{\mathscr{F},\min}\times\{0\}$ є відкрито-замкненим ідеалом в $X_{\mathscr{F},\min}$. Тоді фактор-напівгратка $X_{\mathscr{F},\min}/I$ з визначеною на ній фактор-топологією є дискретною топологічною напівграткою, яка топологічно ізоморфна дискретній напівгратці $(\mathbb{N},\min)$. За теоремою 29 маємо, що напівгратка $X_{\mathscr{F},\min}/I$ не є H-замкненою. Отже напівгратка $X_{\mathscr{F},\min}$ не є абсолютно H-замкненою. □

Наслідок 1.2.3. *Кожна замкнена піднапівгратка напівгратки $Y_{\min}$ є абсолютно H-замкненою тоді і тільки тоді, коли $\mathscr{F}$ є фільтром, що складається з коскінченних підмножин в $\mathbb{N}$.*

Доведення. ($\Leftarrow$) Якщо $\mathscr{F}$ є фільтром, що складається з коскінченних підмножин в $\mathbb{N}$, то простір $Y_{\min} = \mathbb{N}_{\mathscr{F},\min} \times E_2$ є компактним. У цьому випадку кожна замкнена підмножина в $Y_{\min}$ є компактною, а тому кожна замкнена піднапівгратка напівгратки $Y_{\min}$ є абсолютно H-замкненою.

($\Rightarrow$) Якщо $\mathscr{F}$ є вільним фільтром на $\mathbb{N}$, що містить множину $F \subseteq \mathbb{N}$ з нескінченним доповненням $\mathbb{N} \setminus F$, то

$$X_{\mathscr{F},\min} = \big(\mathbb{N}_{\mathscr{F},\min} \times \{0\}\big) \cup \big((\mathbb{N} \setminus F) \times \{1\}\big)$$

є замкненою піднапівграткою топологічної напівгратки $Y_{\min}$. З твердження 1.2.2 випливає, що топологічна напівгратка $X_{\mathscr{F},\min}$ не є абсолютно H-замкнена. $\square$

Позначимо $Y_{\max} = \mathbb{N}_{\mathscr{F},\max} \times E_2$ та

$$X_{\mathscr{F},\max} = \left(\mathbb{N}_{\mathscr{F},\max} \times \{0\}\right) \cup \left((\mathbb{N} \setminus F) \times \{1\}\right).$$

Легко бачити, що $X_{\mathscr{F},\max}$ є замкненою піднапівграткою в $Y_{\max}$. Аналогічно до тверджень 1.2.1 та 1.2.2 доводяться наступні два твердження.

Твердження 1.2.4. *$X_{\mathscr{F},\max}$ є H-замкненою топологічною напівґраткою.*

Твердження 1.2.5. *Топологічна напівгратка $X_{\mathscr{F},\max}$ не є абсолютно H-замкненою.*

Доведення наступного наслідку є аналогічним доведенню наслідка 1.2.3 і випливає з тверджень 1.2.4 та 1.2.5.

Наслідок 1.2.6. *Кожна замкнена піднапівгратка напівгратки $Y_{\max}$ є абсолютно H-замкненою тоді і тільки тоді, коли $\mathscr{F}$ є фільтром, що складається з коскінченних підмножин в $\mathbb{N}$.*

Зауважимо, що побудовані вище приклади H-замкнених топологічних напівграток $X_{\mathscr{F},\max}$ та $X_{\mathscr{F},\min}$ дають негативну відповідь на проблему Степпа (див. [120, питання 17]).

Нехай λ – довільний нескінчений кардинал і $0 \notin \lambda$. На дискретному топологічному просторі $E_\lambda = \{0\} \cup \lambda$ означимо напівграткову операцію за формулою:

$$x \cdot y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x = y; \\ 0, & \text{якщо } x \neq y. \end{cases}$$

Нехай $\mathscr{F}$ – вільний фільтр на $\mathbb{N}$, який містить множину F з нескінченним доповненням $\mathbb{N} \setminus F$. Через $Y^\lambda_{\max}$ позначимо прямий добуток топологічних напівграток $\mathbb{N}_{\mathscr{F},\max}$ та E_λ. Легко бачити, що множина

$$X^\lambda_{\mathscr{F},\max} = (\mathbb{N}_{\mathscr{F},\max} \times \{0\}) \cup ((\mathbb{N} \setminus F) \times \lambda)$$

є замкненою піднапівграткою в $Y^\lambda_{\max}$.

Твердження 1.2.7. *Топологічна напівгратка $X^\lambda_{\mathscr{F},\max}$ є H-замкненою.*

Доведення. Припустимо, що топологічна напівгратка $X^\lambda_{\mathscr{F},\max}$ не є H-замкненою, тоді існує топологічна напівгратка T, яка містить $X^\lambda_{\mathscr{F},\max}$ як власну щільну піднапівгратку. Зафіксуємо довільний елемент $e \in T \setminus E$. За теоремою 29 топологічна напівгратка $\mathbb{N}_{\mathscr{F},\max} \times \{0\}$ є H-замкненою, а тому вона замкнена в T. Тоді існує такий відкритий окіл $U(e)$ точки e в T, що $U(e) \cap (\mathbb{N}_{\mathscr{F},\max} \times \{0\}) = \varnothing$. За неперервністю напівграткової операції в T існує такий відкритий окіл $V(e) \subseteq U(e)$ точки e в T, що $V(e) \cdot V(e) \subseteq U(e)$. З твердження 1.2.4 випливає, що для довільного $a \in \lambda$ напівгратка

$$Z_a = (\mathbb{N}_{\mathscr{F},\max} \times \{0\}) \cup ((\mathbb{N} \setminus F) \times \{a\}) \subset X^\lambda_{\mathscr{F},\max}$$

є H-замкненою і тому вона замкнена в T. Звідси випливає, що $V(e) \cap Z_a \neq \varnothing$ для нескінченної кількості елементів $a \in \lambda$. Отже, отримуємо, що

$$(V(e) \cdot V(e)) \cap \mathbb{N}_{\mathscr{F},\max} \times \{0\} \neq \varnothing.$$

З отриманого протиріччя випливає, що $X^\lambda_{\mathscr{F},\max}$ є H-замкненою топологічною напівграткою. $\square$

Твердження 1.2.8. *Топологічна напівгратка $X^{\lambda}_{\mathscr{F},\max}$ не є абсолютно H-замкненою.*

Доведення. З означення напівгратки $X^{\lambda}_{\mathscr{F},\max}$ випливає, що для довільної підмножини $\kappa \subset \lambda$ множина $I_\kappa = (\mathbb{N}_{\mathscr{F},\max} \times \{0\}) \cup ((\mathbb{N} \setminus F) \times \kappa)$ є відкрито-замкненим ідеалом в $X^{\lambda}_{\mathscr{F},\max}$. Звідси випливає, що фактор-напівгратка $X^{\lambda}_{\mathscr{F},\max}/I_\kappa$ з фактор-топологією є дискретною топологічною напівграткою. Зауважимо, що $X^{\lambda}_{\mathscr{F},\max}/I_\kappa$ топологічно ізоморфна дискретній ортогональній сумі потужності λ топологічних напівграток $(\mathbb{N}, \max)$. Легко бачити, що напівгратка $X^{\lambda}_{\mathscr{F},\max}/I_\kappa$ не є H-замкненою. Отже топологічна напівгратка $X^{\lambda}_{\mathscr{F},\max}$ не є абсолютно H-замкненою. $\square$

Зауважимо, що для довільної підмножини $\kappa \subset \lambda$ природній гомоморфізм $\pi\colon X^{\lambda}_{\mathscr{F},\max} \to E/I_\kappa$ є відкрито-замкненим неперервним відображенням. Тоді з твердження 1.2.8 випливає наступний наслідок:

Наслідок 1.2.9. *Для довільного нескінченого кардиналу λ існує 2^λ неперервних, відкрито-замкнених сюр'єктивних гомоморфних образів топологічної напівгратки*

$$X^{\lambda}_{\mathscr{F},\max} = (\mathbb{N}_{\mathscr{F},\max} \times \{0\}) \cup ((\mathbb{N} \setminus F) \times \lambda) \subset \mathbb{N}_{\mathscr{F},\max} \times E_\lambda,$$

які не є H-замкненими топологічними напівгратками.

Висновки. У цьому розділі описано H-поповнення та AH-поповнення напівграток $(\mathbb{N}, \max)$ та $(\mathbb{N}, \min)$. Доведено, що не існує універсального H-поповнення (AH-поповнення) топологічних напівграток $(\mathbb{N}, \min)$ та $(\mathbb{N}, \max)$. Побудовано приклади H-замкених але не абсолютно H-замкнених топологічних напівграток. Більше того, для довільного нескінченного кардинала λ побудовано H-замкнену топологічну напівгратку, яка допускає 2^λ неперервних відкрито-замкнених гомоморфних образів, які не є H-замкненими топологічними напівгратками. Вище згадані приклади дають негативну відповідь на питання 17 зі статті [120].

Основні результати цього розділу опубліковано в статті [22].

РОЗДІЛ 2
λ-ПОЛІЦИКЛІЧНИЙ МОНОЇД $\mathcal{P}_\lambda$

У цьому розділі вивчатимуться алгебраїчні та топологічні властивості λ-поліциклічного моноїда $\mathcal{P}_\lambda$.

Легко бачити, що у випакдку $\lambda = 1$ напівгрупа $\mathcal{P}_1$ ізоморфна біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем. Для довільного натурального числа $n > 1$ поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_n$ є конгруенц-простою, комбінаторною, 0-біпростою, 0-E-унітарною інверсною напівгрупою (див. [99, розділ 9.3]).

В статті [53] показано, що біциклічна напівгрупа допускає лише дискретну напівгрупову топологію. В статті [40] цей результат було поширено на випадок напівтопологічних напівгруп. Стабільні та Г-компактні топологічні напівгрупи не містять біциклічну напівгрупу [13,77]. Проблема вкладення біциклічної напівгрупи в близькі до компактних топологічні напівгрупи досліджувалась в [17, 18, 71].

В статті [53] було показано, що якщо біциклічна напівгрупа $\mathcal{C}(p, q)$ є щільною піднапівгрупою топологічної напівгрупи S та $I = S \setminus \mathcal{C}(p, q) \neq \varnothing$, то I є замкненим двобічним ідеалом в S. Також в роботі [53] описано замикання біциклічного моноїда $\mathcal{C}(p, q)$ в локально компактній топологічній інверсній напівгрупі. Замикання біциклічного моноїда в зліченно компактних і псевдокомпактних топологічних напівгрупах досліджувалось в [18].

Довільний ненульовий елемент у гаусдорфовій напівтопологічній напівгрупі $\lambda\times\lambda$-матричних одиниць $\mathcal{B}_\lambda$ є ізольованою точкою [67]. В [67] було доведено, що на $\mathcal{B}_\lambda$ існує єдина гаусдорфова слабко компактна топологія τ_A, що перетворює $\mathcal{B}_\lambda$ в напівтопологічну напівгрупу і, більше того, $(\mathcal{B}_\lambda, \tau_A)$ є компактним топологічним простором. Замиканння нескінченної напівгрупи $\lambda\times\lambda$-матричних одиниць в напівтопологічних і топологічних напівгрупах та її вкладення в близькі до компактних топологічні напівгрупи досліджувались в [61, 67, 68].

В статті [102] вивчались топологізації інверсних напівгруп над орієнтованими графами і було доведено, що якщо $G(E)$ – гаусдорфова інверсна топологічна напівгрупа над орієнтованим графом E, то $G(E) \setminus \{0\}$ є дискретним простором. Також в статті [102] показано, що для довільного скінченного орієнтованого графу E єдина гаусдорфова локально компактна напівгрупова топологія на $G(E)$ – дискретна.

2.1. Алгебраїчні властивості λ-поліциклічного моноїда

Для довільного не нульового кардиналу λ, λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ є напівгрупою з нулем визначеною наступними співвідношеннями:

$$\mathcal{P}_\lambda = \left\langle \{p_i\}_{i\in\lambda}, \{p_i^{-1}\}_{i\in\lambda} \mid p_i p_i^{-1} = 1, p_i p_j^{-1} = 0 \text{ для } i \neq j \right\rangle.$$

Побудуємо зображення поліциклічного моноїда P_λ за допомогою часткових бієкцій вільного моноїда $\mathcal{M}_\lambda$ над кардиналом λ. Нехай $A = \{x_i\}_{i\in\lambda}$– довільна множина потужності λ. Вільний моноїд $\mathcal{M}_A$ над множиною A ми можем ототожнити з вільним моноїдом $\mathcal{M}_\lambda$. Для довільного $i \in \lambda$ означимо часткове відображення $\alpha\colon \mathcal{M}_\lambda \to \mathcal{M}_\lambda$ за формулою $(u)\alpha_i = x_i u$. Легко бачити, що $\mathcal{M}_\lambda$ і $x_i\mathcal{M}_\lambda$ є областю визначення й областю значень, відповідно, часткового відображення α_i. Для довільного $i \in \lambda$ розглядатимемо часткове відображення α_i як елемент симетричного інверсного моноїда $\mathcal{I}(\mathcal{M}_\lambda)$ над множиною $\mathcal{M}_\lambda$. Через $\mathcal{I}_\lambda$ позначатимемо інверсний підмоноїд в $\mathcal{I}(\mathscr{M}_\lambda)$ породжений множиною $\{\alpha_i\colon i \in \lambda\}$. Зауважимо, що $\alpha_i\alpha_i^{-1}$ є тотожнім відображенням на множині $\mathcal{M}_\lambda$ і, якщо $i \neq j$, то $\alpha_i\alpha_j^{-1}$ є порожнім частковим відображенням, для всіх $i, j \in \lambda$. Означимо відображення $h\colon \mathcal{P}_\lambda \to \mathcal{I}_\lambda$ наступним чином:

$$(p_i)h = \alpha_i \qquad \text{і} \qquad (p_i^{-1})h = \alpha_i^{-1}, \qquad i \in \lambda.$$

З наслідку 15 випливає, що відображення $h\colon \mathcal{P}_\lambda \to \mathcal{I}_\lambda$ є ізоморфізмом. Ототожнимо напівгратку ідемпотентів $\mathcal{I}_\lambda$ з вільним моноїдом $\mathcal{M}_\lambda^0$ з приєднаним нулем, на якому заданий наступний частковий порядок:

$$\begin{aligned} &u \leqslant v \quad \text{тоді і тільки тоді, коли} \quad v \text{ є префіксом } u \\ &\text{і} \qquad 0 \leqslant u, \quad \text{для всіх } u, v \in \mathcal{M}_\lambda^0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Цей частковий порядок породжує наступну напівграткову операцію на $\mathcal{M}^0_\lambda$:

$$u * v = v * u = \begin{cases} u, & \text{якщо } v \text{ є префіксом } u; \\ 0, & \text{в іншому випадку,} \end{cases}$$

$$\text{і} \qquad 0 * u = u * 0 = 0 * 0 = 0 \qquad \text{для довільних слів} \qquad u, v \in \mathcal{M}^0_\lambda.$$

Отже ми довели наступне твердження:

Твердження 2.1.1. *Для довільного кардиналу $\lambda > 1$ напівгрупа $\mathcal{P}_\lambda$ ізоморфна інверсній напівгрупі I_λ та напівгратка ідемпотентів $E(\mathcal{P}_\lambda)$ ізоморфна напівгратці $(\mathcal{M}^0_\lambda, *)$.*

Нехай n – довільне натуральне число й $i_1, \ldots, i_n \in \lambda$. Покладемо

$$\mathcal{P}^\lambda_n \langle i_1, \ldots, i_n \rangle = \left\langle p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}, p^{-1}_{i_1}, \ldots, p^{-1}_{i_n} \mid p_{i_k} p^{-1}_{i_k} = 1, p_{i_k} p^{-1}_{i_l} = 0 \text{ for } i_k \neq i_l \right\rangle.$$

Доведення наступної леми є тривільним.

Лема 2.1.2. *Нехай λ – нескінченний кардинал і n – довільне натуральне число. Тоді $\mathcal{P}^\lambda_n \langle i_1, \ldots, i_n \rangle$ – підмоноїд поліциклічного моноїда $\mathcal{P}_\lambda$, який ізоморфний моноїду $\mathcal{P}_n$ для довільних елементів $i_1, \ldots, i_n \in \lambda$.*

З того, що кожен ненульовий елемент $x \in \mathcal{I}_\lambda$ зображається у вигляді композиції скінченої кількості відображень α_i й α^{-1}_j, де $i, j \in \lambda$, випливає наступна лема.

Лема 2.1.3. *Якщо λ – нескінченний кардинал, то для довільних елементів $x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{P}_\lambda$ існують такі $i_1, \ldots, i_n \in \lambda$, що $x_m \in \mathcal{P}^\lambda_n \langle i_1, \ldots, i_n \rangle$, для всіх $m \leqslant k$.*

Теорема 2.1.4. *Для довільного нескінченного кардиналу λ, λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ є конгруенц-простою, комбінаторною, 0-біпростою, 0-E-унітарною інверсною напівгрупою.*

Доведення. За твердженням 2.1.1 напівгрупа $\mathcal{P}_\lambda$ є інверсною.

Покажемо спочатку, що напівгрупа $\mathcal{P}_\lambda$ є 0-біпростою. За твердженням 10, достатньо довести, що для довільних двох ненульових ідемпотентів

$e, f \in \mathcal{P}_\lambda$ існує елемент $x \in \mathcal{P}_\lambda$ такий, що $xx^{-1} = e$ і $x^{-1}x = f$. Зафіксуємо два довільні ненульові ідемпотенти $e, f \in \mathcal{P}_\lambda$. З леми 2.1.3 випливає, що існують такі $i_1, \ldots, i_n \in \lambda$, що $e, f \in \mathcal{P}_n^\lambda \langle i_1, \ldots, i_n \rangle$. Тоді з леми 2.1.2, теореми 13 і твердження 10 випливає, що існує такий елемент $x \in \mathcal{P}_n^\lambda \langle i_1, \ldots, i_n \rangle \subset \mathcal{P}_\lambda$, що $xx^{-1} = e$ і $x^{-1}x = f$. Отже напівгрупа $\mathcal{P}_\lambda$ є 0-біпростою.

З вище побудованого зображення $\mathcal{P}_\lambda$ за допомогою часткових бієкцій на вільному моноїді $\mathcal{M}_\lambda$ випливає, що $\mathscr{H}$-клас в $\mathcal{P}_\lambda$, який містить одиницю є одноелементним. З того, що λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ є 0-біпростою напівгрупою та з теореми 9 випливає, що кожен $\mathscr{H}$-клас в $\mathcal{P}_\lambda$ є одноелементним. Отже, $\mathcal{P}_\lambda$ є комбінаторною напівгрупою.

Припустимо λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ не є 0-E-унітарною напівгрупою. Тоді існує елемент $x \in \mathcal{P}_\lambda$, який не є ідемпотентом, та ненульові ідемпотенти $e, f \in \mathcal{P}_\lambda$ такі, що $xe = f$. За лемою 2.1.3 існують такі елементи $i_1, \ldots, i_n \in \lambda$, що $x, e, f \in \mathcal{P}_n^\lambda \langle i_1, \ldots, i_n \rangle$. Звідси випливає, що $\mathcal{P}_n^\lambda \langle i_1, \ldots, i_n \rangle$ не є 0-E-унітарною напівгрупою, а це суперечить лемі 2.1.2 та теоремі 13. Отже, $\mathcal{P}_\lambda$ є 0-E-унітарною інверсною напівгрупою.

Припустимо, що існує конгруенція $\mathfrak{C}$ на λ-поліциклічному моноїді $\mathcal{P}_\lambda$, що відрізняється від одиничної та універсальної конгруенцій. Тоді існують різні $x, y \in \mathcal{P}_\lambda$ такі, що $x\mathfrak{C}y$. За лемою 2.1.3 існують такі $i_1, \ldots, i_n \in \lambda$, що $x, y \in \mathcal{P}_\lambda^\lambda \langle i_1, \ldots, i_n \rangle$. З леми 2.1.2 і теореми 13 випливає, що $\mathcal{P}_n$ є конгруенц-простою напівгрупою. З того що $x\mathfrak{C}y$ в $\mathcal{P}_n^\lambda \langle i_1, \ldots, i_n \rangle$ випливає, що нуль і одиниця є $\mathfrak{C}$- еквівалентні в $\mathcal{P}_\lambda$, а тому всі елементи в $\mathcal{P}_\lambda$ є $\mathfrak{C}$-еквівалентними. Звідси випливає, що $\mathfrak{C}$ є універсальною конгуенцією на $\mathcal{P}_\lambda$, що суперечить припущенню. Отже λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ є конгруенц-простою напівгрупою. $\square$

Зафіксуємо довільний кардинал $\lambda \geqslant 2$ та два різні елементи $a, b \in \lambda$. Розглянемо множину $A = \{b^i a \colon i = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ вільного моноїда $\mathcal{M}_\lambda$.

З формули (2.1) випливає, що довільні два різні елементи множини A є непорівняльними в $(\mathcal{M}_\lambda^0, \leqslant)$. Нехай $B(b^ia)$ – піднапівгрупа в $\mathcal{I}_\lambda$ породжена підмножиною

$$\left\{\alpha \in \mathcal{I}_\lambda \colon \operatorname{dom}\alpha = b^ia\mathcal{M}_\lambda \text{ і } \operatorname{ran}\alpha = b^ja\mathcal{M}_\lambda \text{ для довільних } i, j \in \omega\right\}.$$

З того, що два різних елемента множини A є непорівняльнми в частково впорядкованій множині $(\mathcal{M}_\lambda^0, \leqslant)$ та з напівгрупової операції в $\mathcal{I}_\lambda$ випливає, що виконуються наступні умови:

(i) $\alpha\beta$ є ненульовм елементом напівгрупи $\mathcal{I}_\lambda$ тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{ran}\alpha = \operatorname{dom}\beta$;

(ii) $\alpha\beta = 0$ в $\mathcal{I}_\lambda$ тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{ran}\alpha \neq \operatorname{dom}\beta$;

(iii) якщо $\alpha\beta \neq 0$ в $\mathcal{I}_\lambda$, то $\operatorname{dom}(\alpha\beta) = \operatorname{dom}\alpha$ та $\operatorname{ran}(\alpha\beta) = \operatorname{ran}\beta$;

(iv) $B(b^ia)$ є інверсною піднапівгрупою в $\mathcal{I}_\lambda$,

для довільних $\alpha, \beta \in B(b^ia)$.

Якщо ототожнити кардинал ω з множиною всіх невід'ємних цілих чисел, то відображення $\mathfrak{h} \colon B(b^ia) \to \mathcal{B}_\omega$ визначене наступним чином:

(a) $(\alpha)\mathfrak{h} = (i, j)$, якщо $\operatorname{dom}\alpha = b^ia\mathcal{M}_\lambda$ і $\operatorname{ran}\alpha = b^ja\mathcal{M}_\lambda$, для довільних $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

(b) $(0)\mathfrak{h} = 0$,

є напівгруповим ізоморфізмом.

Отже ми довели наступне твердження:

Твердження 2.1.5. *Для довільного кардиналу $\lambda \geqslant 2$, λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ містить ізоморфну копію напівгрупи $\omega{\times}\omega$-матричних одиниць $\mathcal{B}_\omega$.*

Твердження 2.1.6. *Для довільного ненульового кардиналу λ та для довільних елементів $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_\lambda \setminus \{0\}$ множини*

$$\{\chi \in \mathcal{P}_\lambda \colon \alpha \cdot \chi = \beta\} \qquad i \qquad \{\chi \in \mathcal{P}_\lambda \colon \chi \cdot \alpha = \beta\}$$

є скінченними в $\mathcal{P}_\lambda$.

Доведення. Покажемо, що множина $\{\chi \in \mathcal{P}_\lambda \colon \alpha \cdot \chi = \beta\}$ є скінченною. В іншому випадку доведення є аналогічним.

Очевидно, що

$$\{\chi \in \mathcal{P}_\lambda \colon \alpha \cdot \chi = \beta\} \subseteq \left\{\chi \in \mathcal{P}_\lambda \colon \alpha^{-1} \cdot \alpha \cdot \chi = \alpha^{-1} \cdot \beta\right\}.$$

Тоді з означення напівгрупи $\mathcal{I}_\lambda$ випливає, що існують такі слова $u, v \in \mathcal{M}_\lambda$, що часткове відображення $\alpha^{-1}\cdot\beta$, визначене за формулою $(ux)(\alpha^{-1}\cdot\beta) = vx$ для всіх $x \in \mathcal{M}_\lambda$, відображає множину $u\mathcal{M}_\lambda$ на $v\mathcal{M}_\lambda$. З того, що $\alpha^{-1} \cdot \alpha$ є тотожнім частковим відображенням випливає, що часткове відображення $\alpha^{-1} \cdot \beta$ є звуженням часткового відображення χ на множину $\operatorname{dom}(\alpha^{-1} \cdot \alpha)$. Отже, за означенням напівгрупи $\mathcal{I}_\lambda$ існують, такі слова $u_1, v_1 \in \mathcal{M}_\lambda$ що u_1 є префіксом слова u, v_1 є префіксом слова v та χ є відображенням з $u_1\mathcal{M}_\lambda$ на $v_1\mathcal{M}_\lambda$, визначеним за формулою $(u_1x)(\alpha^{-1} \cdot \beta) = v_1x$ для довільних $x \in \mathcal{M}_\lambda$. З того, що кожне слово в $\mathcal{M}_\lambda$ має скінченну кількість префіксів випливає, що множина

$$\left\{\chi \in \mathcal{P}_\lambda \colon \alpha^{-1} \cdot \alpha \cdot \chi = \alpha^{-1} \cdot \beta\right\}$$

є скінченною, а тому скінченною є множина $\{\chi \in \mathcal{P}_\lambda \colon \alpha \cdot \chi = \beta\}$. □

Наступна лема описує $\mathscr{R}$-клас одиниці в напівгрупі $\mathcal{P}_\lambda$.

Лема 2.1.7. *Нехай λ – довільний кардинал $\geqslant 2$. Тоді елемент x λ-поліциклічного моноїда $\mathcal{P}_\lambda$ є $\mathscr{R}$-еквівалентним одиниці в $\mathcal{P}_\lambda$ тоді і тільки тоді, коли $x = p_{i_1} \dots p_{i_n}$ для деяких породжуючих елементів $p_{i_1}, \dots, p_{i_n} \in \{p_i\}_{i\in\lambda}$.*

Доведення. Зауважимо, що з означення $\mathscr{R}$-еквівалентності випливає, що $x\mathscr{R}1$ тоді і тільки тоді, коли $xx^{-1} = 1$ (див. [99, розділ 3.2]).

($\Rightarrow$) Припустимо, що елемент $x \in \mathcal{P}_\lambda$ має вигляд $x = p_{i_1} \dots p_{i_n}$, для деяких породжуючих елементів $p_{i_1}, \dots, p_{i_n} \in \{p_i\}_{i\in\lambda}$. Тоді з означення λ-поліциклічного моноїду $\mathcal{P}_\lambda$ випливає, що

$$xx^{-1} = (p_{i_1} \dots p_{i_n})\,(p_{i_1} \dots p_{i_n})^{-1} = p_{i_1} \dots p_{i_n} p_{i_n}^{-1} \dots p_{i_1}^{-1} = 1,$$

і тому $x\mathscr{R}1$.

($\Leftarrow$) Припустимо, що елемент $x \in \mathcal{P}_\lambda$ є $\mathscr{R}$-еквівалентним одиниці в $\mathcal{P}_\lambda$. Тоді з означення напівгрупи $\mathcal{P}_\lambda$ випливає, що існує така скінченна множина $\{p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}\} \subset \{p_i\}_{i\in\lambda}$, що $x \in \mathcal{P}_n^\lambda \langle i_1, \ldots, i_n\rangle$, де

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_n^\lambda \langle i_1, \ldots, i_n\rangle = \\
&= \left\langle p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}, p_{i_1}^{-1}, \ldots, p_{i_n}^{-1} \colon p_{i_k}p_{i_k}^{-1} = 1,\ p_{i_k}p_{i_l}^{-1} = 0 \ \text{ для } \ i_k \neq i_l \right\rangle .
\end{aligned}$$

З наслідку 15 випливає, що елемент x має вигляд $u^{-1}v$, де u та v є словами вільного моноїда $\mathcal{M}_{\{p_{i_1},\ldots,p_{i_n}\}}$ над множиною $\{p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}\}$. Далі ми покажемо, що u – порожнє слово. Припустимо, що $u = a_1 \ldots a_k$ і $v = b_1 \ldots b_l$, для деяких $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l \in \{p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}\}$. Тоді з означення λ-поліциклічного моноїда $\mathcal{P}_\lambda$ випливає, що

$$\begin{aligned}
xx^{-1} &= \left(u^{-1}v\right)\left(u^{-1}v\right)^{-1} = u^{-1}vv^{-1}u = \\
&= (a_1 \ldots a_k)^{-1} (b_1 \ldots b_l) (b_1 \ldots b_l)^{-1} (a_1 \ldots a_k) = \\
&= a_k^{-1} \ldots a_1^{-1} b_1 \ldots b_l b_l^{-1} \ldots b_1^{-1} a_1 \ldots a_k = \\
&= a_k^{-1} \ldots a_1^{-1} 1 a_1 \ldots a_k = \\
&= a_k^{-1} \ldots a_1^{-1} a_1 \ldots a_k \neq 1,
\end{aligned}$$

що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає, що $x = p_{i_1} \ldots p_{i_n}$ для деяких елементів $p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}$ множини $\{p_i\}_{i\in\lambda}$. $\square$

2.2. Напівгрупові топологізації λ-поліциклічного моноїда $\mathcal{P}_\lambda$

Твердження 2.2.1. *Нехай λ – довільний кардинал $\geqslant 2$ і τ – довільна гаусдорфова топологія на $\mathcal{P}_\lambda$, що перетворює $\mathcal{P}_\lambda$ в напівтопологічну напівгрупу. Тоді кожен ненульовий елемент x є ізольованою точкою в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$.*

Доведення. Зауважимо, що λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ є 0-біпростою напівгрупою, а отже є 0-простою напівгрупою. Тоді з неперервності лівих та правих зсувів в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ та з твердження 2.1.6 випливає, що достатньо показати, що існує ненульовий елемент x в $\mathcal{P}_\lambda$, який є ізольованою точкою в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$.

Припустимо, що одиниця λ-поліциклічного моноїда $\mathcal{P}_\lambda$ є неізольованою точкою в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$. Тоді кожен відкритий окіл $U(1)$ одиниці моноїда $\mathcal{P}_\lambda$ є нескінченною множиною.

Зафіксуємо довільне слово x вільного моноїда $\mathcal{M}_\lambda$, що складається з однієї літери. Нехай ε – ідемпотент λ-поліциклічного моноїда $\mathcal{P}_\lambda$, який відповідає тотожньому відображенню множини $x\mathcal{M}_\lambda$. З того, що ліві та праві зсуви на елемент ε є ретракціями топологічного простору $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ та з гаусдорфовості простору $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ випливає, що $\varepsilon\mathcal{P}_\lambda$ і $\mathcal{P}_\lambda\varepsilon$ є замкненими підмножинами в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$. Тоді множина $\varepsilon\mathcal{P}_\lambda \cup \mathcal{P}_\lambda\varepsilon$ також є замкненою в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$. Оскільки $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ – гаусдорфова напівтопологічна напівгрупа, то для довільного відкритого околу $U(\varepsilon) \not\ni 0$ точки ε в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ існує такий відкритий окіл $U(1)$ одиниці в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$, що

$$U(1) \subseteq \mathcal{P}_\lambda \setminus (\varepsilon\mathcal{P}_\lambda \cup \mathcal{P}_\lambda\varepsilon), \qquad \varepsilon \cdot U(1) \subseteq U(\varepsilon) \qquad \text{і} \qquad U(1) \cdot \varepsilon \subseteq U(\varepsilon).$$

Зауважимо, що ідемпотент ε є максимальним в $E(\mathcal{P}_\lambda)\setminus\{1\}$. Тому довільний ідемпотент $\iota \in \mathcal{P}_\lambda \setminus (\varepsilon\mathcal{P}_\lambda \cup \mathcal{P}_\lambda\varepsilon)$ є непорівняльний з ε. З того, що множина $U(1)$ є нескінченною випливає, що існує такий елемент $\alpha \in U(1)$, що або $\alpha \cdot \alpha^{-1}$, або $\alpha^{-1} \cdot \alpha$ є непорівняльним з ε ідемпотентом. Звідси випливає, що або

$$\varepsilon \cdot \alpha = \varepsilon \cdot (\alpha \cdot \alpha^{-1} \cdot \alpha) = (\varepsilon \cdot \alpha \cdot \alpha^{-1}) \cdot \alpha = 0 \cdot \alpha = 0 \in U(\varepsilon),$$

або

$$\alpha \cdot \varepsilon = (\alpha \cdot \alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot \varepsilon = \alpha \cdot (\alpha^{-1} \cdot \alpha \cdot \varepsilon) = \alpha \cdot 0 = 0 \in U(\varepsilon).$$

З отриманого протиріччя випливає, що одиниця 1 є ізольованою точкою в топологічному просторі $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$, що завершує доведення твердження. □

В статті [102] було доведено, що для довільного натурального числа n кожна гаусдорфова локально компактна напівгрупова топологія τ на $\mathcal{P}_n$ є дискретною. Наступне твердження узагальнює цей результат на довільний нескінченний кардинал λ.

Твердження 2.2.2. *Нехай λ – нескінченний кардинал. Тоді довільна гаусдорфова напівгрупова локально компактна топологія на $\mathcal{P}_\lambda$ є дискретною.*

Доведення. Припустимо протилежне: існує гаусдорфова недискретна локально компактна напівгрупова топологія τ на $\mathcal{P}_\lambda$. За твердженням 2.2.1 маємо, що кожен ненульовий елемент в $\mathcal{P}_\lambda$ є ізольованою точкою в топологічному просторі $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$. Звідси випливає, що для довільних двох відкритих компактних околів $U(0)$ і $V(0)$ нуля в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ множина $U(0) \setminus V(0)$ є скінченною. Отже 0 є точкою накопичення довільної нескінченної підмножини свого довільного відкритого компактного околу $U(0)$ в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$.

Через R_1 позначимо $\mathscr{R}$-клас напівгрупи $\mathcal{P}_\lambda$, що містить одиницю 1 λ-поліциклічного моноїда $\mathcal{P}_\lambda$. Тоді виконується лише один з випадків:

(1) існує такий відкритий компактний окіл $U(0)$ точки 0 в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$, що $U(0) \cap R_1 = \varnothing$;

(2) множина $U(0) \cap R_1$ є нескінченною для довільного відкритого компактного околу $U(0)$ точки 0 в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$.

Припустимо, що виконується випадок (1). Для довільного $x \in R_1$ покладемо

$$R[x] = \left\{a \in R_1 \colon x^{-1}a \in U(0)\right\}.$$

Покажемо, що множина $R[x]$ є скінченною для довільного $x \in R_1$. Припустимо протилежне: існує елемент $x \in R_1$, такий що $R[x]$ є нескінченною множиною. Тоді з леми 2.1.7 випливає, що $x^{-1}a$ є ненульовим елементом в $\mathcal{P}_\lambda$ для всіх $a \in R[x]$, і тому за твердженням 2.1.6 маємо, що

$$B = \left\{x^{-1}a \colon a \in R[x]\right\}$$

є нескінченною підмножиною відкритого компактного окола $U(0)$ точки 0. З вище наведених аргументів випливає, що $0 \in \mathrm{cl}_{\mathcal{P}_\lambda}(B)$. З неперервності напівгрупової операції в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ отримуємо, що

$$0 = x \cdot 0 \in x \cdot \mathrm{cl}_{\mathcal{P}_\lambda}(B) \subseteq \mathrm{cl}_{\mathcal{P}_\lambda}(x \cdot B).$$

З леми 2.1.7 випливає, що $xx^{-1} = 1$ для всіх $x \in R_1$ і тому маємо, що

$$x \cdot B = \left\{xx^{-1}a \colon a \in R[x]\right\} = \{a \colon a \in R[x]\} = R[x] \subseteq R_1.$$

Звідси випливає, що кожен відкритий окіл $U(0)$ точки 0 в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ містить нескінченну кількість елементів з множини R_1, що суперечить припущенню.

Припустимо, що виконується випадок (2). Тоді множина $\{0\}$ є компактним мінімальним ідеалом в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$. З леми 34 випливає, що для довільного відкритого околу $W(0)$ точки 0 в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ існує відкритий окіл $O(0)$ точки 0 в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ такий, що $O(0) \subseteq W(0)$ і $O(0)$ є ідеалом в $\mathrm{cl}_{\mathcal{P}_\lambda}(O(0))$, тобто,

$$O(0) \cdot \mathrm{cl}_{\mathcal{P}_\lambda}(O(0)) \cup \mathrm{cl}_{\mathcal{P}_\lambda}(O(0)) \cdot O(0) \subseteq O(0).$$

За твердженням 2.2.1 всі ненульові елементи в $\mathcal{P}_\lambda$ є ізольованими точками в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ і тому маємо, що $\mathrm{cl}_{\mathcal{P}_\lambda}(O(0)) = O(0)$. Звідси випливає, що $O(0)$ є відкрито-замкненою піднапівгрупою напівгрупи $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$. Отже топологічний λ-поліциклічний моноїд $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ має базу $\mathscr{B}(0)$ в точці 0, яка складається з відкритих компактних піднапівгруп в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$. Зафіксуємо довільну компактну напівгрупу $S \in \mathscr{B}(0)$. Згідно нашого припущення існує елемент $x \in S \cap R_1$. З того, що $x \in R_1$ та з леми 2.1.7 випливає, що $xx^{-1} = 1$. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що $x^{-1}x \neq 1$, оскільки S є власною піднапівгрупою в $\mathcal{P}_\lambda$. Покладемо $\mathbb{B}(x) = \langle x, x^{-1} \rangle$. З леми 11 випливає, що напівгрупа $\mathbb{B}(x)$ ізоморфна біциклічній напівгрупі. Зауважимо, що за твердженням 2.2.1 всі ненульові елементи $\mathcal{P}_\lambda$ є ізольованими точками в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$. Тоді легко бачити, що $\mathbb{B}^0(x) = \mathbb{B}(x) \sqcup \{0\}$ є замкненою піднапівгрупою компактної топологічної напівгрупи S, яка ізоморфна біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем, що суперечить наслідку 33. Отже випадок (2) не виконується.

З отриманих протиріч випливає, що не існує гаусдорфової недискретної локально компактної напівгрупової топології на λ-поліциклічному моноїді $\mathcal{P}_\lambda$. $\square$

Наступний приклад показує, що твердження 2.2.2 не узагальнюється на випадок, коли $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ є напівтопологічною інверсною напівгрупою з неперервною інверсією. Більше того, існує компактна гаусдорфова топологія $\tau_{\mathsf{A\text{-}c}}$ на $\mathcal{P}_\lambda$ така, що $(\mathcal{P}_\lambda, \tau_{\mathsf{A\text{-}c}})$ є напівтопологічною інверсною напівгрупою з неперервною інверсією.

Приклад 2.2.3. Нехай λ – довільний ординал $\geqslant 2$. Через $\tau_{\mathsf{A\text{-}c}}$ позначимо топологію однаточкової компактифікації Алєксандрова дискретного простору $\mathcal{P}_\lambda \setminus \{0\}$, з наростом $\{0\}$, де 0 – нуль λ-поліциклічного моноїда $\mathcal{P}_\lambda$. З того, що $\mathcal{P}_\lambda \setminus \{0\}$ є дискретним відкритим підпростором в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau_{\mathsf{A\text{-}c}})$ випливає, що нам достатньо довести нарізну неперервність напівгрупової операції в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau_{\mathsf{A\text{-}c}})$ лише у наступних двох випадках:

$$x \cdot 0 \qquad \text{i} \qquad 0 \cdot x,$$

де x є довільним ненульовим елементом напівгрупи $\mathcal{P}_\lambda$. Зафіксуємо відкритий окіл $U_A(0)$ нуля в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau_{\mathsf{A\text{-}c}})$ такий, що $A = \mathcal{P}_\lambda \setminus U_A(0)$ є скінченною підмножиною в $\mathcal{P}_\lambda$. За твердженням 2.1.6 маємо, що

$$R_x^A = \{a \in \mathcal{P}_\lambda \colon x \cdot a \in A\} \qquad \text{і} \qquad L_x^A = \{a \in \mathcal{P}_\lambda \colon a \cdot x \in A\}$$

є скінченними, але не обов'язково непорожніми підмножинами в $\mathcal{P}_\lambda$. Покладемо

$$U_{R_x^A}(0) = \mathcal{P}_\lambda \setminus R_x^A, \qquad U_{L_x^A}(0) = \mathcal{P}_\lambda \setminus L_x^A \qquad \text{і} \qquad U_{A^{-1}} = \mathcal{P}_\lambda \setminus \{a \colon a^{-1} \in A\}.$$

Тоді отримуємо, що

$$x \cdot U_{R_x^A}(0) \subseteq U_A(0), \qquad U_{L_x^A}(0) \cdot x \subseteq U_A(0) \qquad \text{і} \qquad (U_{A^{-1}})^{-1} \subseteq U_A(0).$$

Отже $(\mathcal{P}_\lambda, \tau_{\mathsf{A\text{-}c}})$ є напівтопологічною напівгрупою з неперервною інверсією.

Твердження 2.2.4. *Нехай λ – довільний кардинал $\geqslant 2$ і τ – гаусдорфова топологія на $\mathcal{P}_\lambda$ така, що $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ – напівтопологічна напівгрупа. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) $\tau = \tau_{\mathsf{A\text{-}c}}$;

(ii) *$(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ є компактною напівтопологічною напівгрупою;*

(iii) *$(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ є слабко компактною напівтопологічною напівгрупою.*

Доведення. Імплікації $(i) \Rightarrow (ii)$ та $(ii) \Rightarrow (iii)$ є тривіальними, а імплікація $(ii) \Rightarrow (i)$ випливає, з твердження 2.2.1.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Припустимо, що існує гаусдорфова слабко компактна, некомпактна топологія τ на $\mathcal{P}_\lambda$, стосовно якої $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ є напівтопологічною напівгрупою. Тоді існує відкрите покриття $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{J}}$ топологічного простору $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$, що не містить скінченного підпокриття. Нехай U_{α_0} є довільним елементом сім'ї $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathscr{J}}$, що містить точку $0 \in \mathcal{P}_\lambda$. Тоді $\mathcal{P}_\lambda \setminus U_{\alpha_0} = A_{U_{\alpha_0}}$ є нескінченною підмножиною $\mathcal{P}_\lambda$. За твердженням 2.2.1 множина

$$\{U_{\alpha_0}\} \cup \big\{\{x\} \colon x \in A_{U_{\alpha_0}}\big\}$$

є нескінченою, локально скінченою сім'єю відкритих множин топологічного простору $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$, що суперечить слабкій компактності простору $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$. $\square$

За твердженням 23, замикання $\mathrm{cl}_S(T)$ довільної напівгрупи T в напівтопологічній напівгрупі S є піднапівгрупою в S. Наступне твердження описує стуктуру наросту отриманого при замиканні λ-поліциклічного моноїда $\mathcal{P}_\lambda$ в напівтопологічній напівгрупі.

Твердження 2.2.5. *Нехай λ – довільний кардинал $\geqslant 2$ та S – гаусдорфова напівтопологічна напівгрупа, що містить $\mathcal{P}_\lambda$ як щільну піднапівгрупу. Тоді $S \setminus \mathcal{P}_\lambda \cup \{0\}$ є замкненим ідеалом в S.*

Доведення. Зауважимо, що з твердження 23 випливає, що нуль моноїда $\mathcal{P}_\lambda$ є нулем в напівтопологічній напівгрупі S. Тому у випадку, коли $S \setminus \mathcal{P}_\lambda = \varnothing$ твердження очевидне.

Припустимо, що $S \setminus \mathcal{P}_\lambda \neq \varnothing$. Покладемо $I = S \setminus \mathcal{P}_\lambda \cup \{0\}$. З теореми 21 випливає, що I є замкненим підпростором в S. Припустимо, що I не є ідеалом в S. Якщо $I \cdot S \nsubseteq I$, то існують такі $x \in I \setminus \{0\}$ та $y \in \mathcal{P}_\lambda \setminus \{0\}$, що $x \cdot y = z \in \mathcal{P}_\lambda \setminus \{0\}$. З теореми 21 випливає, що y та z є ізольованими точками в S. Тоді з нарізної неперервності напівгрупової операції в S випливає, що існує відкритий окіл $U(x)$ точки x в S такий, що $U(x) \cdot \{y\} = \{z\}$. Зауважимо, що $|U(x) \cap \mathcal{P}_\lambda| \geqslant \omega$, що суперечить твердженню 2.1.6. З отриманого протиріччя випливає включення $I \cdot S \subseteq I$. Доведення включення $S \cdot I \subseteq I$ є аналогічним.

Покажемо, що $I \cdot I \subseteq I$. Припустимо протилежне: існують точки $x, y \in I \setminus \{0\}$ такі, що $x \cdot y = z \in \mathcal{P}_\lambda \setminus \{0\}$. З теореми 21 випливає, що z є ізольованою точкою в топологічному просторі S. Тоді з нарізної неперервності операції в S випливає, що існує такий відкритий окіл $U(x)$ точки x в S, що $U(x) \cdot \{y\} = \{z\}$. З того, що $|U(x) \cap \mathcal{P}_\lambda| \geqslant \omega$ випливає, що існує такий елемент $a \in \mathcal{P}_\lambda \setminus \{0\}$, що $a \cdot y \in a \cdot I \nsubseteq I$, що суперечить попередній частині нашого доведення. □

2.3. Про вкладення λ-поліциклічного моноїда $\mathcal{P}_\lambda$ в близькі до компактних топологічні напівгрупи

За теоремою 37 напівгрупа $\omega{\times}\omega$-матричних одиниць $\mathcal{B}_\omega$ не вкладається в зліченно компактну топологічну напівгрупу. З твердження 2.1.5 випливає, що для довільного кардиналу $\lambda \geqslant 2$, λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ не вкладається в зліченно компактну топологічну напівгрупу.

Згідно теореми 38 кожен неперервний гомоморфізм з топологічної напівгрупи $\omega{\times}\omega$-матричних одиниць в довільну зліченно компактну топологічну напівгрупу є анулюючим. Позаяк, за теоремою 2.1.4 напівгрупа $\mathcal{P}_\lambda$ є конгруенц-простою, то з теорем 38 і 2.1.4 випливає наступний наслідок:

Наслідок 2.3.1. *Для довільного кардиналу $\lambda \geqslant 2$ довільний неперервний гомоморфізм з топологічної напівгрупи $\mathcal{P}_\lambda$ в довільну зліченно компактну топологічну напівгрупу є анулюючим.*

Твердження 2.3.2. *Для довільного кардиналу $\lambda \geqslant 2$ довільний неперервний гомоморфізм з топологічної напівгрупи $\mathcal{P}_\lambda$ в топологічну напівгрупу S таку, що $S{\times}S$ є тихонівським псевдокомпактним топологічним простором є анулюючим і, як наслідок, S не містить λ-поліциклічного моноїда $\mathcal{P}_\lambda$.*

Доведення. Спочатку ми покажемо, що напівгрупа S не містить λ-поліциклічного моноїда $\mathcal{P}_\lambda$. З теореми 26 випливає, що для довільної топологічної напівгрупи S, квадрат якої $S \times S$ є псевдокомпактним простором, напівгрупова операція $\mu\colon S \times S \to S$ продовжується до неперервної напівгрупової операції $\beta\mu\colon \beta S \times \beta S \to \beta S$, а тому S є піднапівгрупою топологічної напівгрупи βS. Отже, якщо б λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ вкладався в S, то він мав би бути піднапівгрупою компактної топологічної напівгрупи βS, що суперечить наслідку 2.3.1. Перша частина нашого твердження випливає з того, що $\mathcal{P}_\lambda$ є конгруенц-простою напівгрупою. $\square$

Нагадаєм (див. [49]), що *компактифікацією Бора топологічної напів-*

групи S називається пара $(\beta, B(S))$ така, що $B(S)$ є компактною топологічною напівгрупою, $\beta\colon S \to B(S)$ є неперервним гомоморфізмом і, якщо $g\colon S \to T$ є неперервним гомоморфізмом з S в компактну топологічну напівгрупу T, то існує і єдиний неперервний гомоморфізм $f\colon B(S) \to T$ такий, що діаграма

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"'] & B(S) \arrow[dl, "f"] \\ T & \end{tikzcd}$$

є комутативною.

За теоремою 2.1.4 маємо, що для довільного нескінченного кардиналу λ, λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ є конгруенц-простою інверсною напівгрупою. Тому з наслідка 2.3.1 випливає наступний наслідок:

Наслідок 2.3.3. *Для довільного кардиналу $\lambda \geqslant 2$ компактифікація Бора топологічного λ-поліциклічного моноїда $\mathcal{P}_\lambda$ є тривіальною напівгрупою.*

Наступна теорема узагальнює теорему 37.

Теорема 2.3.4. *Для довільного нескінченного кардиналу λ напівгрупа $\lambda\times\lambda$-матричних одиниць $\mathcal{B}_\lambda$ не вкладається як щільний підпростір в гаусдорфову слабко компактну топологічну напівгрупу.*

Доведення. Припустимо протилежне: існує слабко компактна топологічна напівгрупа S, що містить напівгрупу $\lambda\times\lambda$-матричних одиниць $\mathcal{B}_\lambda$ як щільну піднапівгрупу.

Спочатку покажемо, що піднапівгрупа ідемпотентів $E(\mathcal{B}_\lambda)$ напівгрупи $\mathcal{B}_\lambda$ з індукованою топологією з S є компактною. Припустимо протилежне: $E(\mathcal{B}_\lambda)$ не є компактним підпростором топологічної напівгрупи S. Тоді існує відкритий окіл $U(0)$ нуля 0 в S такий, що $E(\mathcal{B}_\lambda) \setminus U(0)$ є нескінченою підмножиною в $E(\mathcal{B}_\lambda)$. Зауважимо, що замикання напівгратки в топологічній напівгрупі є напівграткою (див. наслідок 25). Очевидно, що кожен максимальний ланцюг в $E(\mathcal{B}_\lambda)$ є скінченим. Тоді з теореми 31 випливає, що напівгратка $E(\mathcal{B}_\lambda)$ є замкненою піднапівгрупою в S. З леми 35 випливає, що кожен ненульовий елемент напівгрупи $\mathcal{B}_\lambda$ є ізольованою точкою в S, а тому за теоремою 21 маємо, що $\mathcal{B}_\lambda \setminus \{0\}$ є відкритим дискретним підпростором топологічної напівгрупи S. Звідси випливає, що $E(\mathcal{B}_\lambda) \setminus U(0)$ є нескінченним відкрито-замкненим дискретним підпростором в S. А це суперечить слабкій компактності топологічного простору S.

Якщо піднапівгрупа ідемпотентів $E(\mathcal{B}_\lambda)$ є компактною, тоді з теореми 39 випливає, що напівгрупа $\lambda\times\lambda$-матричних одиниць $\mathcal{B}_\lambda$ є замкненою піднапівгрупою в S і з того, що $\mathcal{B}_\lambda$ є щільною в S випливає, що $\mathcal{B}_\lambda$ співпадає з топологічною напівгрупою S, що суперечить твердженню 36. □

Лема 2.3.5. *Довільний гаусдорфовий слабко компактний топологічний простір з щільним дискретним підпростором є зліченно пракомпактний.*

Доведення. Припустимо протилежне: існує такий гаусдорфовий слабко компактний топологічний простір X з дискретним щільним підпростором D, що X не є зліченно пракомпактним. Тоді довільна щільна підмножина A в топологічному просторі X містить таку нескінченну підмножину B_A, що B_A не має точки накопичення в просторі X. Отже дискретний щільний підпростір D топологічного простору X містить нескінченну підмножину B_D, що не має точки накопичення в просторі X. Тоді B_D є замкненим підпростором в X. З теореми 21 випливає, що D є відкритим підпростором в X. Отже, B_D є відкрито-замкненим дискретним нескінченним підпростором в X, що суперечить слабкій компактності простору S. □

Теорема 2.3.6. *Для довільного кардиналу $\lambda \geqslant 2$ не існує гаусдорфової слабко компактної топологічної напівгрупи S, яка містить λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ як щільну піднапівгрупу.*

Доведення. З твердження 2.2.1 і леми 2.3.5 випливає, що достатньо показати, що не існує гаусдорфової зліченно пракомпактної топологічної напівгрупи, яка містить λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ як щільну піднапівгрупу.

Припустимо протилежне: існує гаусдорфова зліченно пракомпактна топологічна напівгрупа S, що містить λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ як щільну піднапівгрупу. Тоді існує щільний підпростір A в S такий, що кожна нескінченна множина $B \subseteq A$ має точку накопичення в просторі S. За твердженням 2.2.1, $\mathcal{P}_\lambda \setminus \{0\}$ є дискретним щільним підпростором в S і тому з теореми 21 випливає, що $\mathcal{P}_\lambda \setminus \{0\}$ є відкритим підпростором в S. Звідси випливає, що $\mathcal{P}_\lambda \setminus \{0\} \subseteq A$. За твердженням 2.1.5, $\mathcal{P}_\lambda$ містить ізоморфну копію напівгрупи $\omega\times\omega$-матричних одиниць $\mathcal{B}_\omega$. Тоді зі зліченної пракомпактності топологічного простору S випливає, що кожна нескінченна підмножина C множини $\mathcal{B}_\omega \setminus \{0\}$ має точку накопичення в X. Звідси отримуємо, що замикання $\operatorname{cl}_S(\mathcal{B}_\omega)$ є зліченно пракомпактною піднапівгрупою топологічної напівгрупи S, а це суперечить теоремі 2.3.4. $\square$

2.4. Замикання λ-поліциклічного моноїда $\mathcal{P}_\lambda$ в топологічних інверсних напівгрупах

Нехай S є топологічною інверсною напівгрупою. З теореми 1 випливає, що $L_x = L_{x^{-1}x}$ і $R_x = R_{xx^{-1}}$ для довільного $x \in S$. З того, що відображення $\varphi\colon S \to E(S)$ і $\psi\colon S \to E(S)$, визначені за формулами

$$(x)\varphi = xx^{-1} \qquad \text{і} \qquad (x)\psi = x^{-1}x$$

є неперервними випливає, що множини

$$L_x = (x^{-1}x)\psi^{-1} \qquad \text{і} \qquad R_x = (xx^{-1})\varphi^{-1}$$

є замкненими в просторі S. Звідси випливає, що для довільних двох ідемпотентів e та f в топологічній інверсній напівгрупі S $\mathscr{H}$-класи:

$$H_e = R_e \cap L_e \qquad \text{і} \qquad H_{e,f} = R_e \cap L_f$$

також є замкненими підмножинами в S. Більше того, відношення $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$ і $\mathscr{H}$ є замкненими підмножинами в добутку $S \times S$. Проте відношення $\mathscr{D}$ і $\mathscr{J}$ вже можуть не бути замкненими підмножинами в $S \times S$ (див. [53, розділ II]).

Наступне твердження описує $\mathscr{H}$-класи, які містяться в одному $\mathscr{D}$-класі деякої топологічної інверсної напівгрупи.

Твердження 2.4.1. *Нехай S – гаусдорфова топологічна інверсна напівгрупа й a, c – довільні $\mathscr{D}$-еквівалентні елементи в S. Тоді існує елемент $b \in S$ такий, що $a\mathscr{R}b$ і $b\mathscr{L}c$ в S, тому*

$$as = b, \qquad bs' = a, \qquad tb = c, \qquad t'c = b,$$

для деяких $s, s', t, t' \in S$. Відображення

$$\mathfrak{f}_{a,c}\colon H_a \to H_c\colon x \mapsto txs \qquad i \qquad \mathfrak{f}_{c,a}\colon H_c \to H_a\colon x \mapsto t'xs'$$

є неперервними та взаємно оберненими, а тому є гомеоморфізмами замкнених підпросторів H_a і H_c топологічного простору S. Більше того, *якщо H_a і H_c є підгрупами в S, то H_a і H_c є топологічно ізоморфними замкненими підгрупами в топологічній інверсній напівгрупі S.*

Доведення. З вище наведених аргументів випливає, що H_a і H_c є замкненими підпросторами в S. Алгебраїчна частина нашого твердження випливає з теорем 7 і 8. З неперервності напівгрупової операції в S випливає, що відображення

$$\mathfrak{f}_{a,c}\colon H_a \to H_c \qquad \text{і} \qquad \mathfrak{f}_{c,a}\colon H_c \to H_a$$

є неперервними і, як наслідок, є гомеоморфізмами. З доведення теореми 7 випливає, що у випадку, коли H_a та H_c є підгрупами в S, то існують елементи $u, u' \in S$ такі, що відображення

$$\mathfrak{f}_{a,c}\colon H_a \to H_c\colon x \mapsto uxu' \qquad \text{і} \qquad \mathfrak{f}_{c,a}\colon H_c \to H_a\colon x \mapsto u'xu$$

є взаємно оберненими ізоморфізмами, і тому з неперервності напівгрупової операції в S випливає, що так визначені відображення є топологічними ізоморфізмами. □

Зауваження 2.4.2. З доведення твердження 2.4.1 випливає, що довільні два $\mathscr{H}$-класи, що лежать в одному $\mathscr{D}$-класі гаусдорфової напівтопологічної напівгрупи S є гомеоморфними підпросторами в S, але вони не обов'язково є замкненими в S. Схоже твердження виконується для максимальних підгруп в S (див. [61]).

Лема 2.4.3. *Нехай T – довільна гаусдорфова топологічна інверсна напівгрупа та S – інверсна піднапівгрупа в T. Нехай W – довільний $\mathscr{H}$-клас в S, який є замкненою підмножиною в T і D_W – $\mathscr{D}$-клас напівгрупи S, який містить множину W. Тоді довільний $\mathscr{H}$-клас $H \subseteq D_W$ напівгрупи S є замкненою підмножиною в T.*

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли множина W містить ідемпотент, тобто, W є максимальною підгрупою напівгрупи S (див. теорему 6).

Якщо $\mathscr{H}$-клас H містить ідемпотент, то з теореми 6 випливає, що H є максимальною підгрупою в S і тому H є підгрупою топологічної інверсної напівгрупи T. Через e та f позначимо нейтральні елементи груп W та H, відповідно. З того, що ідемпотенти e та f є $\mathscr{D}$-еквівалентними в S та з твердження 10 випливає, що існує елемент $a \in S$ такий, що $aa^{-1} = e$ і $a^{-1}a = f$, і за твердженням 5 ідемпотенти e та f є $\mathscr{D}$-еквівалентними в T. Через H_e^T і H_f^T позначимо $\mathscr{H}$-класи в напівгрупі T ідемпотентів e і f, відповідно. Означимо відображення

$$\mathfrak{f}_{e,f}\colon T \to T \qquad \text{та} \qquad \mathfrak{f}_{f,e}\colon T \to T$$

за формулами

$$(x)\mathfrak{f}_{e,f} = a^{-1}xa \qquad \text{і} \qquad (x)\mathfrak{f}_{f,e} = axa^{-1},$$

відповідно. З того, що

$$aa^{-1} = ss^{-1} = s^{-1}s = e, \qquad ea = af = a, \qquad \text{і} \qquad a^{-1}a = tt^{-1} = t^{-1} = f$$

для довільних $s \in H_e^T$ і $t \in H_f^T$, випливають наступні рівності:

$$\begin{aligned}
&(s)\mathfrak{f}_{e,f}\big((s)\mathfrak{f}_{e,f}\big)^{-1} = a^{-1}sa(a^{-1}sa)^{-1} = a^{-1}saa^{-1}s^{-1}a = \\
&= a^{-1}ses^{-1}a = a^{-1}ss^{-1}a = a^{-1}ea = a^{-1}a = f; \\
&\big((s)\mathfrak{f}_{e,f}\big)^{-1}(s)\mathfrak{f}_{e,f} = (a^{-1}sa)^{-1}a^{-1}sa = a^{-1}s^{-1}aa^{-1}sa = \\
&= a^{-1}s^{-1}esa = a^{-1}s^{-1}sa = a^{-1}ea = a^{-1}a = f; \\
&(t)\mathfrak{f}_{f,e}\big((t)\mathfrak{f}_{f,e}\big)^{-1} = ata^{-1}(ata^{-1})^{-1} = ata^{-1}at^{-1}a^{-1} = \\
&= atft^{-1}a^{-1} = att^{-1}a^{-1} = afa^{-1} = aa^{-1} = e; \\
&\big((t)\mathfrak{f}_{f,e}\big)^{-1}(t)\mathfrak{f}_{f,e} = (ata^{-1})^{-1}ata^{-1} = at^{-1}a^{-1}ata^{-1} = \\
&= at^{-1}fta^{-1} = at^{-1}ta^{-1} = afa^{-1} = aa^{-1} = e; \\
&\big((s)\mathfrak{f}_{e,f}\big)\mathfrak{f}_{f,e} = aa^{-1}saa^{-1} = ese = s; \\
&\big((t)\mathfrak{f}_{f,e}\big)\mathfrak{f}_{e,f} = a^{-1}ata^{-1}a = ftf = t.
\end{aligned}$$

Аналогічно, для довільних елементів $s, v \in H_e^T$ і $t, u \in H_f^T$ маємо, що

$$(s)\mathfrak{f}_{e,f}(v)\mathfrak{f}_{e,f} = a^{-1}saa^{-1}va = a^{-1}seva = a^{-1}sva = (sv)\mathfrak{f}_{e,f}$$

і

$$(t)\mathfrak{f}_{f,e}(u)\mathfrak{f}_{f,e} = ata^{-1}aua^{-1} = atfua^{-1} = atua^{-1} = (tu)\mathfrak{f}_{f,e}.$$

Отже звуження

$$\mathfrak{f}_{e,f}|_{H_e^T} \colon H_e^T \to H_f^T \qquad \text{і} \qquad \mathfrak{f}_{f,e}|_{H_f^T} \colon H_f^T \to H_e^T$$

є взаємно оберненими груповими ізоморфізмами. З того, що $a \in S$ випливає, що звуження

$$\mathfrak{f}_{e,f}|_W \colon W \to H \qquad \text{і} \qquad \mathfrak{f}_{f,e}|_H \colon H \to W$$

також є взаємно оберненими груповими ізоморфізмами. З цього і з неперервності лівих і правих зсувів в T випливає, що H є замкненою підгрупою топологічної інверсної напівгрупи T.

Тепер розглянемо випадок, коли $\mathscr{H}$-клас H не містить ідемпотентів. Тоді існують два різні ідемпотенти $e, f \in S$ такі, що $ss^{-1} = e$ та $s^{-1}s = f$ для всіх $s \in H$. Припустимо протилежне: H не є замкненою підмножиною топологічної інверсної напівгрупи T. Тоді існує точка накопичення $x \in T \setminus H$ множини H в топологічному просторі T. З того, що довільний $\mathscr{H}$-клас топологічної інверсної напівгрупи T є замкненою підмножиною в T отримаємо, що H та x містяться в одному $\mathscr{H}$-класі H_x напівгрупи T. Звідси випливає, що $xx^{-1} = e$ і $x^{-1}x = f$. Розглянемо довільний $\mathscr{H}$-клас H_e^T в T, що містить ідемпотент $e \in S$. Очевидно, що він є топологічною підгрупою топологічної інверсної напівгрупи T і за твердженням 2.4.1 підпростір H_e^T топологічного простору T є гомеоморфним підпростору H_x топологічного простору T. Більше того, з теореми 7 випливає, що існує такий гомеоморфізм $\mathfrak{f}\colon H_x \to H_e^T$, що образ $(H)\mathfrak{f}$ є топологічною підгрупою топологічної інверсної напівгрупи T і $(H)\mathfrak{f}$ є топологічно ізоморфним топологічній групі W. Тоді $(H)\mathfrak{f}$ не є замкненою підгрупою в T, що суперечить попередній частині доведення.

Припустимо, що множина W не містить ідемпотентів. За попередньою частиною доведення маємо, що достатньо показати існування максимальної підгрупи H_e з одиницею e в $\mathscr{D}$-класі D_W такої, що H_e є замкненою підгрупою топологічної напівгрупи T. Припустимо протилежне: кожна максимальна підгрупа з $\mathscr{D}$-класу D_W не є замкненою в T. Зафіксуємо таку підгрупу H_e з одиницею e в $\mathscr{D}$-класі D_W, що $xx^{-1} = e$ для всіх $x \in W$. З твердження 5 випливає, що існують $\mathscr{H}$-класи H_W^T і H_e^T в напівгрупі T, що містять множину W і групу H_e. З того, що в топологічній напівгрупі T довільний $\mathscr{H}$-клас є замкненою підмножиною в T, маємо, що W є замкненим підпростором простору H_W^T, а H_e не є замкненою підгрупою топологічної групи H_e^T. Тоді з тверджень 5 та 2.4.1 випливає, що існують такі $s, s', t, t' \in S$, що відображення

$$\mathfrak{f}_e \colon H_e^T \to H_W^T \colon x \mapsto txs \qquad \text{і} \qquad \mathfrak{f}_W \colon H_W^T \to H_e^T \colon x \mapsto t'xs'$$

є взаємно оберненими гомеоморфізмами топологічних просторів H_e^T і H_W^T, і звуження

$$\mathfrak{f}_e|_{H_e} \colon H_e^T \to W \qquad \text{і} \qquad \mathfrak{f}_W|_W \colon W \to H_e$$

є взаємно оберненими гомеоморфізмами. Це суперечить тому, що H_e не є замкненою підмножиною в H_e^T. $\square$

З леми 2.4.3 випливає наступний наслідок.

Наслідок 2.4.4. *Нехай T – гаусдорфова топологічна інверсна напівгрупа та S – інверсна піднапівгрупа в T. Нехай G – максимальна підгрупа в S, що є H-замкненою в класі топологічних груп і D_G є $\mathscr{D}$-класом напівгрупи S, що містить групу G. Тоді довільний $\mathscr{H}$-клас $H \subseteq D_G$ напівгрупи S є замкненою підмножиною топологічного простору T.*

Лема 2.4.5. *Нехай S – гаусдорфова топологічна інверсна напівгрупа, що задовільняє наступні умови:*

(*i*) *довільна максимальна підгупа напівгрупи S є H-замкненою в класі топологічних груп;*

(*ii*) *всі немінімальні ідемпотенти напівгратки $E(S)$ є ізольованими точками в $E(S)$.*

Тоді, якщо існує топологічна інверсна напівгрупа T, що містить S як щільну власну піднапівгрупу, то для довільного елемента $x \in T \setminus S$ хоча б один з ідемпотентів $x \cdot x^{-1}$ або $x^{-1} \cdot x$ належить до $T \setminus S$.

Доведення. Спочатку ми розглянемо випадок, коли напівгратка $E(S)$ не містить мінімального ідемпотента. Тоді $E(S)$ є дискретним підпростором в S і з теореми 21 випливає, що $E(S)$ є відкритим підпростором топологічного простору $E(T)$, а тому довільна точка множини $E(S)$ є ізольованою в $E(T)$. З твердження 28 випливає, що $\mathrm{cl}_T(E(S)) = \mathrm{cl}_{E(T)}(E(S))$ і, як наслідок отримуємо, що точки з $E(T) \setminus E(S)$ не є ізольованими в $E(T)$.

Зафіксуємо довільну точку $x \in T \setminus S$. З наслідку 2.4.4 випливає, що кожен $\mathscr{H}$-клас є замкненою підмножиною топологічної інверсної напівгрупи T. З того, що x є точкою накопичення множини S в топологічному просторі T маємо, що довільний відкритий окіл $U(x)$ точки x в T перетинає нескінченно багато $\mathscr{H}$-класів напівгрупи S. З твердження 27 випливає, що інверсія в T є гомеоморфізмом топологічного простору T і тому $(U(x))^{-1}$ є відкритим околом точки x^{-1} в T, що перетинає нескінченну кількість $\mathscr{H}$-класів напівгрупи S. Тоді з неперервності напівгрупової операції та інверсії в T випливає, що хоча б одна з множин

$$\Big(U(x)\,(U(x))^{-1}\Big) \cap E(T) \qquad \text{або} \qquad \Big((U(x))^{-1}\,U(x)\Big) \cap E(T)$$

є нескінченною для довільного відкритого околу $U(x)$ точки x в топологічному просторі T. З цього випливає, що хоча б одна з точок $x \cdot x^{-1}$ або $x^{-1} \cdot x$ є неізольованою в топологічному просторі $E(T)$.

У випадку, коли напівгратка $E(S)$ містить мінімальний ідемпотент, з наведених вище аргументів випливає, що для довільної точки $x \in T \setminus S$ і для довільного відкритого околу $U(x)$ точки x в T хоча б одна з множин

$$\Big(U(x)\,(U(x))^{-1}\Big) \cap E(T) \qquad \text{або} \qquad \Big((U(x))^{-1}\,U(x)\Big) \cap E(T)$$

є нескінченною, для довільного відкритого околу $U(x)$ точки x в топологічній напівгрупі T. Легко бачити, що H_e є мінімальним ідеалом в S, який одночасно є H-замкненою топологічною групою. Тоді існує відкритий окіл $U(x)$ точки x в T такий, що $U(x) \cap H_e = \varnothing$. Якщо $xx^{-1} = e$ або $x^{-1}x = e$, то $x = xx^{-1}x \in H_e$, що суперечить припущенню $x \in T \setminus S$. $\square$

З леми 2.4.5 випливає наступні два наслідки:

Наслідок 2.4.6. *Нехай S – гаусдорфова топологічна інверсна напівгрупа, що задовільняє наступні умови:*

(i) довільна максимальна підгрупа напівгрупи S і напівгратка $E(S)$ є H-замкненими в класі топологічних інверсних напівгруп;

(ii) всі немінімальні елементи напівгратки $E(S)$ є ізольованими точками в $E(S)$.

Тоді S є H-замкненою в класі топологічних інверсних напівгруп.

Наслідок 2.4.7. *Нехай $\lambda \geqslant 2$ і припустимо $\mathcal{P}_\lambda$ є власною щільною піднапівгрупою топологічної інверсної напівгрупи S. Тоді*

$$xx^{-1} \in S \setminus \mathcal{P}_\lambda \qquad \textit{або} \qquad x^{-1}x \in S \setminus \mathcal{P}_\lambda,$$

для всіх $x \in S \setminus \mathcal{P}_\lambda$.

Наступна теорема дає достатні умови для того, щоб топологічний інверсний λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ був абсолютно H-замкненим в класі топологічних інверсних напівгруп.

Теорема 2.4.8. *Нехай λ – довільний кардинал $\geqslant 2$ і τ – гаусдорфова інверсна напівгрупова топологія на $\mathcal{P}_\lambda$ така, що множина $U(0) \cap L$*

є нескінченною для довільного відкритого околу $U(0)$ нуля 0 в $(\mathcal{P}_\lambda,\tau)$ і довільного максимального ланцюга L напівгратки $E(\mathcal{P}_\lambda)$. Тоді $(\mathcal{P}_\lambda,\tau)$ є абсолютно H-замкненою напівгрупою в класі топологічних інверсних напівгруп.

Доведення. Зауважимо, що з означення λ-поліциклічного моноїда $\mathcal{P}_\lambda$ випливає, що для довільного максимального ланцюга L в $E(\mathcal{P}_\lambda)$ множина $L\setminus\{0\}$ є ω-ланцюгом. З твердження 1.1.1 випливає, що довільний ланцюг L в $E(\mathcal{P}_\lambda)$ в індукованій топології з $(\mathcal{P}_\lambda,\tau)$ є абсолютно H-замкненою топологічною напівграткою. Припустимо, що $E(\mathcal{P}_\lambda)$ в індукованій топології з $(\mathcal{P}_\lambda,\tau)$ не є H-замкненою топологічною напівграткою. Тоді існує топологічна напівгратка S, що містить $E(\mathcal{P}_\lambda)$ як щільну власну піднапівгратку. З неперервності напівграткової операції в S випливає, що нуль 0 напівгратки $E(\mathcal{P}_\lambda)$ є нулем в S. Зафіксуємо довільний елемент $x\in S\setminus E(\mathcal{P}_\lambda)$. Тоді для відкритого околу $U(x)$ точки x в S такого, що $0\notin U(x)$, з неперервності напівграткової операції в S випливає, що існує такий відкритий окіл $V(x)\subseteq U(x)$ точки x в S, що $V(x)\cdot V(x)\subseteq U(x)$. Окіл $V(x)$ перетинає нескінченну кількість максимальних ланцюгів з $E(\mathcal{P}_\lambda)$, оскільки всі максимальні ланцюги в $E(\mathcal{P}_\lambda)$ в індукованій топології з $(\mathcal{P}_\lambda,\tau)$ є абсолютно H-замкненими топологічними напівгратками. Тоді з означення напівгрупової операції в $\mathcal{P}_\lambda$ випливає, що $0\in V(x)\cdot V(x)\subseteq U(x)$, що суперечить вибору окола $U(x)$. Отже, $E(\mathcal{P}_\lambda)$ в індукованій топології з $(\mathcal{P}_\lambda,\tau)$ є H-замкненою топологічною напівграткою.

З наслідку 2.4.6 випливає, що топологічна інверсна напівгрупа $(\mathcal{P}_\lambda,\tau)$ є H-замкненою в класі топологічних інверсних напівгруп. З того, що $\mathcal{P}_\lambda$ є конгуенц-простою напівгрупою випливає, що кожен неперервний гомоморфний образ $(\mathcal{P}_\lambda,\tau)$ є H-замкненим в класі топологічних інверсних напівгруп. Справді, якщо $h\colon(\mathcal{P}_\lambda,\tau)\to T$ є неперервним, неанулюючим гомоморфізмом з $(\mathcal{P}_\lambda,\tau)$ в топологічну інверсну напівгрупу T, то множина

$U((0)h) \cap (L)h$ є нескінченною для довільного відкритого околу $U((0)h)$ точки $(0)h$ в T. Тоді з попередньої частини доведення випливає, що $(\mathcal{P}_\lambda)h$ є замкненою піднапівгрупою в T. $\square$

Зауваження 2.4.9. Зауважимо, що λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ є інверсною напівгрупою над орієнтованим графом E, що складається з однієї вершини та λ петель, множину шляхів якого можна ототожнити з вільним моноїдом $\mathcal{M}_\lambda$ над кардиналом λ. А тому з леми 14 випливає, що довільний ненульовий елемент $x \in \mathcal{P}_\lambda$ має вигляд $u^{-1}v$, де u та v є словами вільного моноїда $\mathcal{M}_\lambda$, і напівгрупова операція на $\mathcal{P}_\lambda$ в цьому зображенні визначена наступним чином:

$$a^{-1}b \cdot c^{-1}d = \begin{cases} (c_1a)^{-1}d, & \text{якщо } c = c_1b, \quad \text{де } c_1 \in \mathcal{M}_\lambda; \\ a^{-1}b_1d, & \text{якщо } b = b_1c, \quad \text{де } b_1 \in \mathcal{M}_\lambda; \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases} \tag{2.2}$$

і $\quad a^{-1}b \cdot 0 = 0 \cdot a^{-1}b = 0 \cdot 0 = 0.$

У наступному прикладі побудовано топологію τ_{mi} на λ-поліциклічному моноїді P_λ таку, що $(\mathcal{P}_\lambda, \tau_{\mathsf{mi}})$ є абсолютно H-замкненою топологічною інверсною напівгрупою.

Приклад 2.4.10. Визначимо топологію τ_{mi} на λ-поліциклічному моноїді $\mathcal{P}_\lambda$ наступним чином. Всі ненульові елементи $\mathcal{P}_\lambda$ є ізольованими точками в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau_{\mathsf{mi}})$. Для довільної скінченної підмножини A вільного моноїда $\mathcal{M}_\lambda$ покладемо

$$U_A(0) = \{a^{-1}b \colon a, b \in \mathscr{M}_\lambda \setminus A\}.$$

База топології τ_{mi} в точці 0 визначається сім'єю

$$\mathscr{B}_{\mathsf{mi}} = \{U_A(0) \colon A \text{ – скінченна підмножина в } \mathcal{M}_\lambda\}.$$

З того, що $U_{\{a,b\}}(0) \not\ni a^{-1}b$ для довільного ненульового елемента $a^{-1}b \in \mathcal{P}_\lambda$ випливає, що τ_{mi} є гаусдорфовою топологією на $\mathcal{P}_\lambda$. Зауважимо, що

$(U_A(0))^{-1} = U_A(0)$ для довільного $U_A(0) \in \mathscr{B}_{\mathsf{mi}}$. Отже інверсія є неперервною в $(P_\lambda, \tau_{\mathsf{mi}})$. Зафіксуємо довільний елемент $a^{-1}b \in \mathcal{P}_\lambda$ і довільний відкритий базовий окіл $U_A(0)$ нуля 0 в $(P_\lambda, \tau_{\mathsf{mi}})$. Через S_b позначимо множину всіх суфіксів слова b. Покладемо

$$B = S_b \cup \{kb \in \mathscr{M}_\lambda \colon ka \in A\}.$$

Очевидно, що множина B є скінченною. З формули (1) випливає, що $a^{-1}b \cdot U_B(0) \subseteq U_A(0)$. Нехай S_a є множиною всіх суфіксів слова a. Позначимо

$$D = S_a \cup \{ta \in \mathcal{M}_\lambda \colon tb \in A\}.$$

Очевидно, що множина D є скінченною і з формули (1) випливає, що $U_D(0) \cdot a^{-1}b \subseteq U_A(0)$. Зауважимо також, що $U_T(0) \cdot U_T(0) \subseteq U_A(0)$ для

$$T = A \cup \{b \in \mathcal{M}_\lambda \colon \ \text{b є суфіксом деякого } a \in A\}.$$

Отже $(\mathcal{P}_\lambda, \tau_{\mathsf{mi}})$ є топологічною інверсною напівгрупою.

З теореми 2.4.8 і прикладу 2.4.10 випливає наступний наслідок:

Наслідок 2.4.11. *Топологічна інверсна напівгрупа $(\mathcal{P}_\lambda, \tau_{\mathsf{mi}})$ є абсолютно H-замкненою в класі топологічних інверсних напівгруп.*

Теорема 2.4.12. *Для довільного кардиналу $\lambda \geqslant 2$, τ_{mi} є найслабшою напівгруповою інверсною топологією на $\mathcal{P}_\lambda$.*

Доведення. З зауваження 2.4.9 випливає, що довільний ненульовий елемент напівгратки $E(\mathcal{P}_\lambda)$ може бути зображений у вигляді $a^{-1}a$, де a є елементом вільного моноїда $\mathcal{M}_\lambda$, і напівгрупова операція в цьому зображенні $E(\mathcal{P}_\lambda)$ визначається за формулою (2.2). З означення топології τ_{mi} на P_λ випливає, що піднапівгрупа ідемпотентів $E(\mathcal{P}_\lambda)$ напівгрупи $\mathcal{P}_\lambda$ є компактною підмножиною топологічного простору $(\mathcal{P}_\lambda, \tau_{\mathsf{mi}})$.

Зауважимо, що для довільної топологічної інверсної напівгрупи S відображення

$$\varphi \colon S \to E(S) \qquad \text{та} \qquad \psi \colon S \to E(S),$$

визначені за формулами

$$\varphi(x) = xx^{-1} \qquad \text{i} \qquad \psi(x) = x^{-1}x,$$

відповідно, є неперервними. З того, що інверсний елемент до елемента $u^{-1}v \in \mathcal{P}_\lambda$ дорівнює $v^{-1}u$ випливає, що довільний базовий відкритий окіл точки $0 \in (\mathcal{P}_\lambda, \tau_{\mathsf{mi}})$ можна зообразити наступним чином:

$$U_A(0) = P_\lambda \setminus \left(\varphi^{-1}(A) \cup \psi^{-1}(A)\right),$$

де A є деякою скінченною підмножиною $E(\mathcal{P}_\lambda)$. Звідси випливає, що для довільної скінченної підмножини $A \subset E(\mathcal{P}_\lambda)$ маємо, що $U_A(0) \in \tau$ для кожної напівгрупової інверсної топології τ на $\mathcal{P}_\lambda$. Отже, τ_{mi} є найслабшою напівгруповою інверсною топологією на λ-поліциклічному моноїді $\mathcal{P}_\lambda$. □

У наступному прикладі побудовано топологічну інверсну напівгрупу S, що містить поліциклічний моноїд

$$\mathcal{P}_2 = \left\langle p_1, p_2 \mid p_1p_1^{-1} = p_2p_2^{-1} = 1, p_1p_2^{-1} = p_2p_1^{-1} = 0 \right\rangle$$

як щільну дисретну піднапівгрупу, тобто, поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_2$ з дискретною топологією не є H-замкненим в класі топологічних інверсних напівгруп. Нехай $\mathcal{M}_2$ – вільний моноїд, породжений елементами p_1 і p_2.

Приклад 2.4.13. Нехай $\mathscr{F}$ – фільтр на біциклічній напівгрупі

$$\mathcal{C}(p_1, p_1^{-1}) = \langle p_1, p_1^{-1} \mid p_1p_1^{-1} = 1 \rangle,$$

породжений базою $\mathscr{B} = \{U_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, де $U_n = \left\{p_1^{-k}p_1^m \colon k, m > n\right\}$. Позначимо:

$$A = \left\{a^{-1}b \in \mathcal{P}_2 \colon a \neq p_1a_1 \text{ і } b \neq p_1b_1 \text{ для довільних } a_1, b_1 \in \mathcal{M}_2\right\}.$$

Для довільного елемента $a^{-1}b$ множини A через $\mathscr{F}_{a^{-1}b}$ позначимо фільтр на $\mathcal{P}_2$, породжений базою $\mathscr{B}_{a^{-1}b} = \{V_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, де

$$V_n = a^{-1}U_nb = \left\{(p_1^k a)^{-1}p_1^m b \colon k, m > n\right\}.$$

Очевидно, що $\mathscr{F} = \mathscr{F}_{1^{-1}1}$, де 1 – одиниця вільного моноїда $\mathcal{M}_2$.

Продовжимо бінарну операцію з $\mathcal{P}_2$ на $S = P_2 \cup \left\{\mathscr{F}_{a^{-1}b} \colon a^{-1}b \in A\right\}$ наступним чином:

$$\text{(I)}\quad a^{-1}b \cdot \mathscr{F}_{c^{-1}d} = \begin{cases} \mathscr{F}_{(ea)^{-1}d}, & \text{якщо } c = eb; \\ \mathscr{F}_{(e)^{-1}d}, & \text{якщо } b = p_1^n c \text{ для деякого } n \in \mathbb{N}, \\ & \text{де } e \text{ є найдовшим суфіксом } a \text{ таким,} \\ & \text{що } e \neq p_1 f \text{ для деякого } f \in \mathcal{M}_2; \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

$$\text{(II)}\quad \mathscr{F}_{c^{-1}d} \cdot a^{-1}b = \begin{cases} \mathscr{F}_{c^{-1}eb}, & \text{якщо } d = ea; \\ \mathscr{F}_{c^{-1}e}, & \text{якщо } a = p_1^n d \text{ для деякого } n \in \mathbb{N}, \\ & \text{де } e \text{ є найдовшим суфіксом } b \text{ таким,} \\ & \text{що } e \neq p_1 f \text{ для деякого } f \in \mathcal{M}_2; \\ 0, & \text{в іншому випадку;} \end{cases}$$

$$\text{(III)}\quad \mathscr{F}_{a^{-1}b} \cdot \mathscr{F}_{c^{-1}d} = \begin{cases} \mathscr{F}_{a^{-1}d}, & \text{якщо } b = c; \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Очевидно, що підмножина $T = S \setminus \mathcal{P}_2 \cup \{0\}$ з індукованою операцією з S ізоморфна напівгрупі $\omega \times \omega$-матричних одиниць $\mathcal{B}_\omega$ і, більше того, $(\mathscr{F}_{a^{-1}b})^{-1} = \mathscr{F}_{b^{-1}a}$ в T.

Означимо топологію τ на напівгрупі S наступним чином: елементи напівгрупи $\mathcal{P}_2$ є ізольованими точками в (S, τ), а сім'я

$$\mathscr{B}(\mathscr{F}_{a^{-1}b}) = \{U_n(\mathscr{F}_{a^{-1}b}) : U_n \in \mathscr{B}_{a^{-1}b}\},$$

що складається з множин $U_n(\mathscr{F}_{a^{-1}b}) = U_n \cup \{\mathscr{F}_{a^{-1}b}\}$ визначає базу околів точки $\mathscr{F}_{a^{-1}b} \in S$ в топології τ.

Тепер покажимо, що так визначена бінарна операція на (S, τ) є неперервною.

Розглянемо випадок (I).

Якщо $a^{-1}b \cdot \mathscr{F}_{c^{-1}d} = 0$, то маємо, що $a^{-1}b \cdot U_n(\mathscr{F}_{c^{-1}d}) = \{0\}$ для довільного натурального числа n.

Якщо $a^{-1}b\cdot\mathscr{F}_{c^{-1}d}=\mathscr{F}_{(ea)^{-1}d}$, то з означення бінарної операції на S випливає, що $c=eb$. У такому випадку ми стверджуємо, що

$$a^{-1}b\cdot U_n(\mathscr{F}_{c^{-1}d})\subseteq U_n(\mathscr{F}_{(ea)^{-1}d}),$$

для довільного відкритого базового околу $U_n(\mathscr{F}_{(ea)^{-1}d})$ точки $\mathscr{F}_{(ea)^{-1}d}$ в (S,τ). Справді, якщо $x\in U_n(\mathscr{F}_{c^{-1}d})$, то $x=(p_1^m c)^{-1}p_1^k d$ для деяких натуральних чисел $m,k>n$. Звідси випливає, що

$$a^{-1}b\cdot(p_1^m c)^{-1}p_1^k d=a^{-1}b\cdot(p_1^m eb)^{-1}p_1^k d=(p_1^m ea)^{-1}p_1^k d\in U_n(\mathscr{F}_{(ea)^{-1}d}).$$

Якщо $a^{-1}b\cdot\mathscr{F}_{c^{-1}d}=\mathscr{F}_{e^{-1}d}$, то e є найдовшим суфіксом слова a з $\mathcal{M}_2$, що не дорівнює слову p_1f для деякого $f\in\mathcal{M}_2$. Це виконується, коли $b=p_1^t c$ для деякого натурального числа t. У такому випадку маємо, що

$$a^{-1}b\cdot U_{n+t}(\mathscr{F}_{c^{-1}d})\subseteq U_n(\mathscr{F}_{e^{-1}d})$$

для довільного відкритого базового околу $U_n(\mathscr{F}_{e^{-1}d})$ точки $\mathscr{F}_{e^{-1}d}$ в (S,τ). Справді, якщо $x\in U_{n+t}(\mathscr{F}_{c^{-1}d})$, тоді $x=(p_1^{m+t}c)^{-1}p_1^{k+t}d$ для деяких натуральних чисел $m,k>n$. Звідси випливає, що

$$\begin{aligned}a^{-1}b\cdot(p_1^{m+t}c)^{-1}p_1^{k+t}d=&e^{-1}p_1^{-l}p_1^t c\cdot(p_1^{m+t}c)^{-1}p_1^{k+t}d=\\&=(p_1^{m+l}e)^{-1}p_1^{k+t}d\in U_n(\mathscr{F}_{e^{-1}d}).\end{aligned}$$

У випадку (II) доведення неперервності бінарної операції в (S,τ) є аналогічним, як у випадку (I).

Розглянемо випадок (III).

Якщо $\mathscr{F}_{a^{-1}b}\cdot\mathscr{F}_{c^{-1}d}=0$, то $U_n(\mathscr{F}_{a^{-1}b})\cdot U_n(\mathscr{F}_{c^{-1}d})\subseteq\{0\}$, для довільних відкритих базових околів $U_n(\mathscr{F}_{a^{-1}b})$ і $U_n(\mathscr{F}_{c^{-1}d})$ точок $\mathscr{F}_{a^{-1}b}$ і $\mathscr{F}_{c^{-1}d}$ в (S,τ), відповідно.

Якщо $\mathscr{F}_{a^{-1}b}\cdot\mathscr{F}_{c^{-1}d}=\mathscr{F}_{a^{-1}d}$, то $b=c$ і для довільного відкритого базового околу $U_n(\mathscr{F}_{a^{-1}d})$ точки $\mathscr{F}_{a^{-1}d}$ в (S,τ) маємо, що

$$U_n(\mathscr{F}_{a^{-1}b})\cdot U_n(\mathscr{F}_{b^{-1}d})\subseteq U_n(\mathscr{F}_{a^{-1}d})$$

Справді, якщо

$$(p_1^k a)^{-1} p_1^t b \in U_n(\mathscr{F}_{a^{-1}b}) \qquad \text{і} \qquad (p_1^l b)^{-1} p_1^m d \in U_n(\mathscr{F}_{b^{-1}d}),$$

то

$$(p_1^k a)^{-1} p_1^t b \cdot (p_1^l b)^{-1} p_1^m d = (p_1^k a)^{-1} p_1^t (b \cdot b^{-1}) p_1^{-l} p_1^m d = (p_1^s a)^{-1} p_1^z d,$$

для деяких натуральних чисел $s, z > n$, а тому $(p_1^s a)^{-1} p_1^z d \in U_n(\mathscr{F}_{a^{-1}d})$.

Отже ми довели, що так визначена операція на (S, τ) є неперервною. З того, що $\mathcal{P}_2$ є щільною підмножиною в (S, τ) випливає, що бінарна операція в (S, τ) є асоціативною. З того, що $T = S \setminus \mathcal{P}_2 \cup \{0\}$ з індукованою бінарною операцією з S є ізоморфною напівгрупі $\omega \times \omega$-матричних одиниць $\mathcal{B}_\omega$ випливає, що ідемпотенти в S комутують і, більше того,

$$\mathscr{F}_{a^{-1}b} \cdot \mathscr{F}_{b^{-1}a} \cdot \mathscr{F}_{a^{-1}b} = \mathscr{F}_{b^{-1}a}.$$

Звідси випливає, що S є інверсною напівгрупою. Для довільного базового відкритого околу $U_n(\mathscr{F}_{a^{-1}b})$ точки $\mathscr{F}_{a^{-1}b}$ в (S, τ) маємо, що

$$\left(U_n(\mathscr{F}_{a^{-1}b})\right)^{-1} = U_n(\mathscr{F}_{b^{-1}a}),$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$. Отже інверсія в (S, τ) є неперервною.

2.5. Локально компактний напівтопологічний λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$

Відома теорема А. Вейля стверджує, що локально компактна монотетична топологічна група G (тобто, G містить щільну циклічну підгрупу) є або компактною, або дискретною (див. [131]). За теоремиою 32 гаусдорфовий локально компактний напівтопологічний біциклічний моноїд з приєднаним нулем є або компактним, або дискретним простором. З того, що моноїд $\mathcal{P}_1$ ізоморфний біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем випливає, що теорему 32 можна сформулювати у наступному вигляді: *гаусдорфовий локально компактний напівтопологічний* 1*-поліциклічний моноїд* $\mathcal{P}_1$ *є або компактним, або дискретним простором.*

У цьому підрозділі ми доведимо, що для довільного ненульового кардиналу λ гаусдорфовий локально компактний напівтопологічний λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ є або компактним, або дискретним простором. У цьому підрозділі через λ позначатимемо довільний ненульовий кардинал.

Лема 2.5.1. *Нехай* $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ *– недискретна локально компактна напівтопологічна напівгрупа. Тоді множина* $U(0) \setminus V(0)$ *є скінченною, для довільних відкритих компактних околів* $U(0)$ *і* $V(0)$ *точки* 0.

Доведення. Не зменшуючи загальності можемо вважати, що $V(0) \subset U(0)$. З того, що $U(0) \setminus V(0)$ є замкненим дискретним підпростором компактного простору $U(0)$ випливає, що множина $U(0) \setminus V(0)$ є скінченною. □

Лема 2.5.2. *Нехай* $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ *– недискретна локально компактна напівтопологічна напівгрупа. Тоді для довільного відкритого околу* $U(0)$ *нуля* 0 *існує такий елемент* $u \in \mathcal{M}_\lambda$*, що множина* $R_{u^{-1}u} \cap U(0)$ *є нескінченною.*

Доведення. Припустимо протилежне: існує компактний відкритий окіл $U(0)$ нуля 0 такий, що множина $R_{u^{-1}u} \cap U(0)$ є скінченною для довільного елемента $u \in \mathcal{M}_\lambda$. Покладемо

$$B = \{u \in \mathcal{M}_\lambda : R_{u^{-1}u} \cap U(0) \neq \varnothing\}.$$

Для довільного елемента $u \in B$ через v_u позначимо найдовше слово з $\mathcal{M}_\lambda$ таке, що $u^{-1}v_u \in R_{u^{-1}u} \cap U(0)$. З того, що $U(0)$ є нескінченною підмножиною в $\mathcal{P}_\lambda$ випливає, що окіл $U(0)$ перетинає нескінченну кількість $\mathscr{R}$-класів моноїда $\mathcal{P}_\lambda$. Звідси випливає, що $A = \{u^{-1}v_u : u \in B\}$ є нескінченною підмножиною в $U(0)$. З того, що $0 \cdot p_1 = 0$ та з нарізної неперервності напівгрупової операції в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ випливає існування такого компактного відкритого околу $V(0) \subseteq U(0)$ точки 0, що $V(0) \cdot p_1 \subseteq U(0)$. Але тоді $V(0) \subseteq U(0) \setminus A$, що суперечить лемі 2.5.1. □

Лема 2.5.3. *Нехай $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ – недискретна локально компактна напівтопологічна напівгрупа. Тоді для довільного відкритого околу $U(0)$ нуля 0 і для довільного елементу $u \in \mathcal{M}_\lambda$ множина $R_{u^{-1}u} \cap U(0)$ є нескінченною.*

Доведення. Легко бачити, що $R_{u^{-1}u} = \{u^{-1}v : v \in \mathcal{M}_\lambda\}$. З зауваження 2.4.9 випливає, що $a^{-1}u \cdot R_{u^{-1}u} = R_{a^{-1}a}$. Зафіксуємо довільний елемент $a \in \mathcal{M}_\lambda$ і довільний відкритий компактний окіл $U(0)$ нуля 0. З леми 2.5.2 випливає, що існує елемент $u \in \mathcal{M}_\lambda$ такий, що множина $R_{u^{-1}u} \cap U(0)$ є нескінченною. З того, що $a^{-1}u \cdot 0 = 0$ та з нарізної неперервності напівгрупової операції в $\mathcal{P}_\lambda$ випливає, що існує відкритий компактний окіл $V(0)$ нуля 0 такий, що $a^{-1}u \cdot V(0) \subseteq U(0)$. З леми 2.5.1 випливає, що множина $V(0) \cap R_{u^{-1}u}$ є нескінченною. Тоді з твердження 2.1.6 випливає, що множина $a^{-1}u \cdot (R_{u^{-1}u} \cap V(0))$ є нескінченною підмножиною в $U(0) \cap R_{a^{-1}a}$. □

Лема 2.5.4. *Нехай $(\mathcal{P}_k, \tau)$ – недискретна локально компактна напівтопологічна напівгрупа, де k – фіксоване натуральне число. Тоді множина $R_1 \setminus U(0)$ є скінченною, для довільного відкритого компактного околу $U(0)$ нуля 0.*

Доведення. Нехай $p_1, \ldots, p_k$ – породжуючі елементи поліциклічного моноїда $\mathcal{P}_k$. Припустимо протилежне: існує такий компактний відкритий окіл

$U(0)$ нуля 0, що множина $A = R_1 \setminus U(0)$ є нескінченною. Ми стверджуємо, що для довільного натурального числа $n \leqslant k$ множина

$$A_{p_n} = \{a_i \in A : a_i p_n \in U(0)\}$$

є скінченною. Припустимо, що множина A_{p_n} є нескінченною. Зауважимо, що з твердження 2.1.6 випливає, що множина $A_{p_1} \cdot p_1$ є нескінченною підмножиною в $U(0)$. З того, що $0 \cdot p_1^{-1} = 0$ та з нарізної неперервності напівгрупової операції в $(\mathcal{P}_k, \tau)$ випливає, що існує такий відкритий компактний окіл $V(0) \subseteq U(0)$ точки 0, що $V(0) \cdot p_1^{-1} \subseteq U(0)$. Тоді

$$V(0) \subseteq U(0) \setminus (A_{p_1} \cdot p_1),$$

що суперечить лемі 2.5.1. Отже множина A_{p_n} є скінченною для довільного натурального числа $n \leqslant k$.

Для довільного елемента a вільного моноїда $\mathcal{M}_k$ через $\uparrow a$ позначимо множину всіх префіксів слова a. Для довільної підмножини $C \subset \mathcal{M}_k$ покладемо $\uparrow C = \cup_{a \in C} \uparrow a$. Нехай

$$A^* = A \setminus \{\uparrow A_{p_1} \cup \ldots \cup \uparrow A_{p_k}\}.$$

Очевидно, що A^* є коскінченною, а отже і нескінченною підмножиною в A. Покажемо, що A^* є правим ідеалом в R_1. Нехай c є довільним елементом в R_1 і $v \in A^*$. Припустимо, що $vc \in R_1 \setminus A^*$. Через c^* позначимо найдовший префікс c такий, що $vc^* \in A^*$. Якщо c^* – порожнє слово, то покладемо $c^* = 1$. Тоді $vc^* p_n \in R_1 \setminus A^*$ для деякого натурального числа $n \leqslant k$. Звідси випливає, що $vc^* \in \uparrow A_{p_n}$. З отриманого протиріччя випливає, що множина A^* є правим ідеалом в R_1.

Зафіксуємо довільний елемент $u \in A^*$. З того, що $u \cdot 0 = 0$, і з нарізної неперервності напівгрупової операції в $(\mathcal{P}_k, \tau)$ випливає, що для довільного відкритого компактного околу $U(0)$ нуля 0 існує такий відкритий компактний окіл $V(0)$ точки 0, що $u \cdot V(0) \subseteq U(0)$. З твердження 2.1.6 і леми 2.5.3 випливає, що множина $u \cdot (V(0) \cap R_1)$ є нескінченною підмножиною в $A^* \cap U(0)$. А це суперечить припущенню: $A = R_1 \setminus U(0)$. □

Лема 2.5.5. *Нехай $(\mathcal{P}_k, \tau)$ – недискретна локально компактна напівтопологічна напівгрупа, де k – фіксоване натуральне число. Тоді для довільного відкритого компактного околу $U(0)$ нуля 0 і для довільного елемента $u \in \mathcal{M}_k$ множина $R_{u^{-1}u} \setminus U(0)$ є скінченною.*

Доведення. Зафіксуємо довільний елемент $u \in \mathcal{M}_k$. За лемою 2.5.4 для довільного відкритого компактного околу $U(0)$ нуля 0 множина $R_1 \setminus U(0)$ є скінченною. З того, що $u^{-1} \cdot 0 = 0$ та з нарізної неперервності напівгрупової операції в $(\mathcal{P}_k, \tau)$ випливає, що для довільного відкритого компактного околу $U(0)$ нуля 0 існує такий відкритий компактний окіл $V(0) \subseteq U(0)$ точки 0, що $u^{-1} \cdot V(0) \subseteq U(0)$. З того, що $u^{-1} \cdot R_1 = R_{u^{-1}u}$ випливає, що множина $R_{u^{-1}u} \setminus U(0)$ є скінченною. □

Теорема 2.5.6. *Нехай $(\mathcal{P}_k, \tau)$ – недискретна локально компактна напівтопологічна напівгрупа, де k – фіксоване натуральне число. Тоді $(\mathcal{P}_k, \tau)$ є компактним простором, який гомеоморфний одноточковій компактифікації дискретного простору $\mathcal{P}_k \setminus \{0\}$.*

Доведення. З леми 2.5.5 випливає, що для довільного відкритого компактного околу $U(0)$ нуля 0 та для довільного елемента $u \in \mathcal{M}_k$ множина $R_{u^{-1}u} \setminus U(0)$ є скінченною. Припустимо, що множина $\mathcal{P}_k \setminus U(0)$ є нескінченною. Тоді множина $R_{u^{-1}u} \setminus U(0)$ є непорожньою для нескінченної кількості елементів $u \in \mathcal{M}_k$. Покладемо

$$B = \{u \in \mathcal{M}_k : R_{u^{-1}u} \setminus U(0) \neq \varnothing\}.$$

Для довільного елемента $u \in B$ через v_u позначимо найдовше слово з вільного моноїда $\mathcal{M}_k$ таке, що $u^{-1}v_u \in R_{u^{-1}u} \setminus U(0)$. Очевидно, що множина

$$C = \{u^{-1}v_u : u \in \mathcal{M}_k\}$$

є нескінченною. Зауважимо, що з твердження 2.1.6 випливає, що множина $C \cdot p_1$ є нескінченною підмножиною в $U(0)$. З того, що $0 \cdot p_1^{-1} = 0$ та з нарізної неперервності напівгрупової операції в $(\mathcal{P}_k, \tau)$ випливає, що існує такий відкритий компактний окіл $V(0) \subset U(0)$ точки 0, що $V(0) \cdot p_1^{-1} \subseteq U(0)$. Тоді $V(0) \subset U(0) \setminus (C \cdot p_1)$, що суперечить лемі 2.5.1. □

Нехай $G = \{p_1, \ldots, p_\lambda\}$ – множина породжуючих елементів напівгрупи $\mathcal{P}_\lambda$. Для довільної скінченної підмножини $B = \{p_{\alpha_1}, .., p_{\alpha_n}\} \subset G$ через $\mathcal{P}_B$ позначимо поліциклічний підмоноїд напівгрупи $\mathcal{P}_\lambda$ породжений елементами множини B, тобто

$$\mathcal{P}_B = \left\langle p_{\alpha_1}, \ldots, p_{\alpha_n}, p_{\alpha_1}^{-1}, \ldots, p_{\alpha_n}^{-1} \mid p_{\alpha_i} p_{\alpha_i}^{-1} = 1, p_{\alpha_i} p_{\alpha_j}^{-1} = 0, \text{ якщо } i \neq j \right\rangle.$$

Лема 2.5.7. *Нехай $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ – недискретна локально компактна напівтопологічна напівгрупа. Тоді для довільного відкритого компактного околу $U(0)$ нуля 0 множина $R_1 \setminus U(0)$ є скінченною.*

Доведення. Нехай $G = \{p_1, .., p_\lambda\}$ – множина породжуючих елементів напівгрупи $\mathcal{P}_\lambda$. Припустимо протилежне: існує такий відкритий компактний окіл $U(0)$ точки 0, що множина $A = R_1 \setminus U(0)$ є нескінченною.

Тоді виконується один з наступних випадків:

- (i) для довільної скінченної підмножини $C = \{p_{\alpha_1}, \ldots, p_{\alpha_n}\}$ в G і для довільного відкритого компактного околу $U(0)$ нуля 0 множина $U(0) \cap \mathcal{P}_C$ є скінченною;
- (ii) існує така скінченна підмножина $C = \{p_{\alpha_1}, \ldots, p_{\alpha_n}\}$ в G, що для довільного відкритого компактного околу $U(0)$ нуля 0 множина $U(0) \cap \mathcal{P}_C$ є нескінченною.

Припустимо, що виконується випадок (i). Для довільного натурального числа $k \leqslant n$ покладемо

$$U_{\alpha_k} = \{a \in U(0) \cap R_1 : a p_{\alpha_k} \in A\}.$$

Аналогічними міркуваннями як у доведенні леми 2.5.4 показується, що множина U_{α_k} є скінченною підмножиною в $U(0)\cap R_1$. Позначимо

$$U_C=(U(0)\cap R_1)\setminus(\uparrow U_{\alpha_1}\cup\ldots\cup\uparrow U_{\alpha_n}).$$

Очевидно, що U_C є нескінченною підмножиною в $U(0)$. Ми стверджуємо, що $U_C\cdot y\subseteq U_C$, для довільного елемента $y\in\mathcal{P}_C\cap R_1$. Припустимо протилежне: існують такі елементи $y\in\mathcal{P}_C\cap R_1$ і $x\in U_C$, що $xy\notin U_C$. Через y^* позначимо такий найдовший префікс слова y, що $xy^*\in U_C$ (зауважимо, що y^* може бути порожнім словом). Тоді $xy^*p_{\alpha_k}\in R_1\setminus U_C$ для деякого елемента $p_{\alpha_k}\in C$. Як наслідок отримуємо $xy^*\in\uparrow U_{\alpha_k}$, що суперечить означенню множини U_C. Отже $U_C\cdot y\subseteq U_C$ для довільного елемента $y\in\mathcal{P}_C\cap R_1$.

Зафіксуємо довільний елемент $v\in U_C$. Нехай B – множина всіх літер слова v. Покладемо $D=C\cup B$. Очевидно, що D є скінченною підмножиною в G. З твердження 2.1.6 випливає, що $v\cdot(\mathcal{P}_C\cap R_1)$ є нескінченною підмножиною в $U_C\cap\mathcal{P}_D$, що суперечить нашому припущенню.

Припустимо, що виконується випадок (ii). Для довільного натурального числа $k\leqslant n$ покладемо

$$A_{\alpha_k}=\{a\in A: ap_{\alpha_k}\in U(0)\}.$$

Аналогічними міркуваннями як у доведенні леми 2.5.4 показується, що A_{α_k} є скінченною підмножиною в A, для довільного натурального числа $k\leqslant n$. Позначимо

$$A_C=A\setminus(\uparrow A_{\alpha_1}\cup\ldots\cup\uparrow A_{\alpha_n}).$$

Очевидно, що A_C є нескінченною підмножиною в A. Ми стверджуємо, що $A_C\cdot y\subseteq A_C$, для довільного елемента $y\in\mathcal{P}_C\cap R_1$. Припустимо протилежне: існують такі елементи $y\in\mathcal{P}_C\cap R_1$ і $x\in A_C$, що $xy\notin A_C$. Через y^* позначимо найдовший префікс слова y такий, що $xy^*\in A_C$ (зауважимо, що y^* може бути порожнім словом). Тоді $xy^*p_{\alpha_k}\in R_1\setminus A_C$ для деякого елемента $p_{\alpha_k}\in C$. Як наслідок $xy^*\in\uparrow A_{\alpha_k}$, що суперечить означенню множини A_C. Отже $A_C\cdot y\subseteq A_C$ для довільного елемента $y\in\mathcal{P}_C\cap R_1$.

Зафіксуємо довільний елемент $v \in A_C$. Нехай B – множина всіх літер слова v. Покладемо $D = C \cup B$. Зауважимо, що $\mathcal{P}_D$ є замкненим і, як наслідок, локально кампактним підмоноїдом в $\mathcal{P}_\lambda$ ізоморфним моноїду $\mathcal{P}_m$, для деякого натурального числа m. З твердження 2.1.6 випливає, що $v \cdot (\mathcal{P}_C \cap R_1)$ є нескінченною підмножиною множини $A \cap \mathcal{P}_D \subset \mathcal{P}_D \setminus U(0)$. Тоді за теоремою 2.5.6 множина $U(0) \cap \mathcal{P}_D$ є скінченною. Звідси випливає, що множина $U(0) \cap \mathcal{P}_C$ також є скінченною, що суперечить нашому припущенню. $\square$

Лема 2.5.8. *Нехай $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ – недискретна локально компактна напівтопологічна напівгрупа. Тоді для довільного відкритого компактного околу $U(0)$ нуля 0 і для довільного елемента $u \in \mathcal{M}_\lambda$ множина $R_{u^{-1}u} \setminus U(0)$ є скінченною.*

Доведення. Зафіксуємо довільний елемент $u \in \mathcal{M}_\lambda$. За лемою 2.5.7 для довільного відкритого компактного околу $U(0)$ нуля 0 множина $R_1 \setminus U(0)$ є скінченною. З того, що $u^{-1} \cdot 0 = 0$ та з нарізної неперервності напівгрупової операції в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ випливає, що для довільного відкритого компактного околу $U(0)$ нуля 0 існує такий відкритий компактний окіл $V(0) \subseteq U(0)$ точки 0, що $u^{-1} \cdot V(0) \subseteq U(0)$. З того, що $u^{-1} \cdot R_1 = R_{u^{-1}u}$ випливає, що множина $R_{u^{-1}u} \setminus U(0)$ є скінченною. $\square$

Теорема 2.5.9. *Гаусдорфовий локально компактний напівтопологічний λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ є або компактним, або дискретним простором.*

Доведення. Припустимо $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ – недискретна локально компактна напівтопологічна напівгрупа. З леми 2.5.8 випливає, що для довільного відкритого компактного околу $U(0)$ нуля 0 і для довільного елемента $u \in \mathcal{M}_\lambda$ множина $R_{u^{-1}u} \setminus U(0)$ є скінченною. Припустимо, що множина $\mathcal{P}_\lambda \setminus U(0)$ є нескінченною. Тоді маємо, що множина $R_{u^{-1}u} \setminus U(0)$ є непорожньою для нескінченної кількості елементів $u \in \mathcal{M}_\lambda$. Покладемо

$$B = \{u \in \mathcal{M}_\lambda : R_{u^{-1}u} \setminus U(0) \neq \varnothing\}.$$

Для довільного елемента $u \in B$ через v_u позначимо найдовше слово з $\mathcal{M}_\lambda$ таке, що $u^{-1}v_u \in \mathscr{R}_{u^{-1}u} \setminus U(0)$. Очевидно, що множина $C = \{u^{-1}v_u : u \in B\}$ є нескінченною підмножиною в $\mathcal{P}_\lambda \setminus U(0)$. З твердження 2.1.6 випливає, що множина $C \cdot p_1$ є нескінченною. З того, що $0 \cdot p_1^{-1} = 0$ та з нарізної неперервності напівгрупової операції в $\mathcal{P}_\lambda$ випливає, що для довільного відкритого компактного околу $U(0)$ нуля 0 існує відкритий компактний окіл $V(0) \subseteq U(0)$ точки 0 такий, що $V(0) \cdot p_1^{-1} \subseteq U(0)$. Але тоді $V(0) \subset U(0) \setminus (C \cdot p_1)$, що суперечить лемі 2.5.1. Отже, $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ є компактною напівтопологічною напівгрупою. $\square$

Висновки. У цьому розділі показано, що довільний ненульовий елемент x напівтопологічного λ-поліциклічного моноїда $\mathcal{P}_\lambda$ є ізольованою точкою. Доведено, що кожна гаусдорфова локально компактна напівгрупова топологія на $\mathcal{P}_\lambda$ є дискретною. Описано всі слабко компактні топології на моноїді $\mathcal{P}_\lambda$, що перетворюють $\mathcal{P}_\lambda$ на напівтопологічну напівгрупу та компактифікацію Бора топологічної напівгрупи $\mathcal{P}_\lambda$. Доведено, що для довільного кардинала $\lambda \geqslant 2$ довільний неперервний гомоморфізм з топологічної напівгрупи $\mathcal{P}_\lambda$ в довільну зліченно компактну топологічну напівгрупу є анулюючим, і не існує слабко компактної топологічної напівгрупи, що містить $\mathcal{P}_\lambda$ як щільну піднапівгрупу.

Знайдено достатні умови для того, щоб топологічний інверсний λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ був абсолютно H-замкненим в класі топологічних інверсних напівгруп. Для довільного ненульового кардиналу λ побудувано найслабшу топологію τ_{mi} на $\mathcal{P}_\lambda$, яка перетворює $\mathcal{P}_\lambda$ в топологічну інверсну напівгрупу та наведено приклад топологічної інверсної напівгрупи S, що містить поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_2$ як щільну дискретну піднапівгрупу.

Описано всі локально компактні топології τ на напівтопологічному λ-поліциклічному моноїді $\mathcal{P}_\lambda$. Зокрема доведено, що локально компактний напівтопологічний λ-поліциклічний моноїд є або компактним, або дискретним простором.

Основні результати, які описані в підрозділах 2.1, 2.2, 2.3 опубліковано в статті [23]. Результати, які описані в підрозділах 2.4 і 2.5 опубліковано в статтях [24] і [21], відповідно.

РОЗДІЛ 3
α-БІЦИКЛІЧНИЙ МОНОЇД $\mathfrak{B}_\alpha$

З означення α-біциклічного моноїда $\mathfrak{B}_\alpha$ випливає, що він є узагальненням біциклічної напівгрупи. Зауважимо, що 1-біциклічний моноїд $\mathfrak{B}_1$ ізоморфний біциклічній напівгрупі. Моноїд $\mathfrak{B}_\alpha$ був введений в роботі [85] і відіграє важливу роль в теорії біпростих напівгруп з цілком впорядкованою множиною ідемпотентів (див. [85]). В статті [115] побудована недискретна топологія на $\mathfrak{B}_2$, яка перетворює $\mathfrak{B}_2$ в топологічну інверсну напівгрупу. В [87] досліджувались топології на $\mathfrak{B}_\alpha$, що перетворюють $\mathfrak{B}_\alpha$ в топологічну інверсну напівгрупу.

Через $\mathscr{I}_{\omega^\alpha}^{\nearrow}$ ми позначимо напівгрупу всіх порядкових ізоморфізмів між головними фільтрами ординалу ω^α, наділену операцією композиції часткових відображень.

Топологічні напівгрупи часткових монотонних відображень лінійно впорядкованих просторів досліджувались в роботах [44, 73, 74]. В статті [73] доведено, що довільна локально компактна топологія на напівгрупі усіх часткових коскінчених монотонних ін'єктивних перетворень множини натуральних чисел є дискретною. В статті [44] доведено, що кожна берівська топологія на напівгрупі усіх майже монотонних, коскінчених ін'єктивних часткових перетворень множини натуральних чисел є дискретною. В статті [74] доведено, що кожна берівська топологія на напівгрупі усіх монотонних ін'єктивних часткових коскінчених перетворень множини цілих чисел є дискретною. Зауважимо, що в статтях [44] та [74] були побудовані недискретні топології, що перетворюють вище згадані напівгрупи в топологічні інверсні напівгрупи.

3.1. Про напівтопологічний α-біциклічний моноїд $\mathfrak{B}_\alpha$

Твердження 3.1.1. *Для довільного ординалу α напівгрупа $\mathscr{I}_{\omega^\alpha}^{\nearrow}$ усіх порядкових ізоморфізмів між головними фільтрами ординалу ω^α ізоморфна α-біциклічному моноїду $\mathfrak{B}_\alpha$.*

Доведення. Зауважимо, що кожний головний фільтр ординалу ω^α співпадає з інтервалом

$$[a, \omega^\alpha) = \{x \in \omega^\alpha : x \geqslant a\},$$

для деякого $a \in \omega^\alpha$. Визначимо відображення $h : \mathscr{I}_{\omega^\alpha}^{\nearrow} \to \mathfrak{B}_\alpha$ наступним чином: для довільного порядкового ізоморфізму $f : [a, \omega^\alpha) \to [b, \omega^\alpha)$ покладемо $(f)h = (a, b)$. Очевидно, якщо існує порядковий ізоморфізм між інтервалами $[a, \omega^\alpha)$ та $[b, \omega^\alpha)$, то він єдиний. Тому відображення h є ін'єктивним. З того, що ординал ω^α є адитивно нерозкладним випливає, що для довільних ординалів $a, b \in \omega^\alpha$ інтервали $[a, \omega^\alpha)$ та $[b, \omega^\alpha)$ є порядково ізоморфними. Звідси випливає, що h є сюр'єктивним відображенням. Безпосередньою перевіркою доводиться, що h є гомоморфізмом. $\square$

Лема 3.1.2. *Нехай $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$ – напівтопологічна напівгрупа. Тоді для довільного ординалу $a \in \omega^\alpha$ елементи $(0, a)$ та $(a, 0)$ є ізольованими точками простору $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$.*

Доведення. Зауважимо, якщо елемент e є ідемпотентом в напівтопологічній напівгрупі S, то обидві множини $e \cdot S$ та $S \cdot e$ є ретрактами в S і тому є замкненими в S. З того, що

$$\{(0,0)\} = \mathfrak{B}_\alpha \setminus ((1,1) \cdot \mathfrak{B}_\alpha \cup \mathfrak{B}_\alpha \cdot (1,1))$$

випливає, що $(0,0)$ є ізольованою точкою в $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$.

З того, що $(0, a) \cdot (a, 0) = (0, 0)$ та з нарізної неперервності напівгрупової операції в $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$ випливає, що існує такий відкритий окіл $V((0, a))$ точки $(0, a)$, що $V((0, a)) \cdot (a, 0) = \{(0, 0)\}$. Зафіксуєм довільний елемент $(c, d) \in V((0, a))$. Тоді $(c, d) \cdot (a, 0) = (0, 0)$, а це можливо тільки тоді, коли $d = a$ та

$c = 0$. Звідси випливає, що $V((0,a)) = \{(0,a)\}$. Отже $(0,a)$ є ізольованою точкою в $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$. Доведення того, що $(a,0)$ є ізольованою точкою в $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$ є аналогічним. $\square$

Лема 3.1.3. *Нехай $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$ є напівтопологічною напівгрупою. Тоді для довільного елементу $(a,b) \in \mathfrak{B}_\alpha$ існує такий відкрито-замкнений окіл $V((a,b))$ точки (a,b), що виконуються наступні умови:*

1) *$c \leqslant a$ та $d \leqslant b$, для довільного елемента $(c,d) \in V((a,b))$;*
2) *$a = c$ тоді і тільки тоді, коли $b = d$, для довільного елемента $(c,d) \in V((a,b))$.*

Доведення. Покладемо

$$V((a,b)) = \{x \in \mathfrak{B}_\alpha : (0,a) \cdot x = (0,b)\}.$$

Зауважимо, що за лемою 3.1.2 точка $(0,b)$ є ізольованою в просторі $\mathfrak{B}_\alpha$. З того, що $(0,a) \cdot (a,b) = (0,b)$ та з нарізної неперервності напівгрупової операції в $\mathfrak{B}_\alpha$ випливає, що $V(a,b)$ є відкрито-замкненим околом точки (a,b). Зафіксуємо довільний елемент $(c,d) \in V((a,b))$. Очевидно, що $(0,a) \cdot (c,d) = (0,b)$. Попередня рівність виконується лише у випадку, коли $c \leqslant a$. Отже, отримуємо, що

$$(0,a) \cdot (c,d) = (0, d + (a - c)) = (0,b).$$

З того, що $d + (a - c) = b$ отримуємо, що $d \leqslant b$. Більше того, якщо $a = c$, то $(0,a) \cdot (c,d) = (0,d) = (0,b)$ і тому $b = d$. $\square$

З леми 3.1.3 випливає наступний наслідок:

Наслідок 3.1.4. *Нехай $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$ – напівтопологічна напівгрупа. Тоді для довільних натуральних чисел n, m елемент (n,m) є ізольованою точкою в просторі $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$.*

Лема 3.1.5. *Нехай $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$ – напівтопологічна напівгрупа. Тоді для довільних різних ординалів $a, b \in \alpha$ елемент (ω^a, ω^b) є ізольованою точкою в просторі $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$.*

Доведення. Спочатку розглянемо випадок $a < b$. З того, що $(0, \omega^a) \cdot (\omega^a, \omega^b) = (0, \omega^b)$, з леми 3.1.2 та з нарізної неперервності напівгрупової операції в $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$ випливає, що існує такий відкритий окіл $V((\omega^a, \omega^b))$ точки (ω^a, ω^b) в просторі $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$, що $(0, \omega^a) \cdot V((\omega^a, \omega^b)) = \{(0, \omega^b)\}$ і окіл $V((\omega^a, \omega^b))$ задовільняє умовам леми 3.1.3. Тоді

$$(0, \omega^a) \cdot (c, d) = (0, d + (\omega^a - c)) = (0, \omega^b),$$

для всіх $(c, d) \in V((a, b))$. Тому $d + (\omega^a - c) = d + \omega^a = \omega^b$. Проте попередня рівність виконується лише тоді, коли $\omega^a = \omega^b$, суперечність.

Доведення у випадку $a > b$ є аналогічним. □

За теоремою 16 кожен ординал α розклададєть у нормальну форму Кантора, тобто $\alpha = n_1\omega^{\beta_1} + n_2\omega^{\beta_2} + ... + n_k\omega^{\beta_k}$, де n_i є натуральними числами, а $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ – спадна послідовність ординалів.

Лема 3.1.6. *Нехай задано нормальні форми Кантора*

$$a = n_1\omega^{\beta_1} + n_2\omega^{\beta_2} + ... + n_k\omega^{\beta_k} \qquad і \qquad b = m_1\omega^{\gamma_1} + m_2\omega^{\gamma_2} + ... + m_t\omega^{\gamma_t}$$

ординалів a та b, відповідно. Тоді, якщо $(a, b) \in \mathfrak{B}_\alpha$ і $(\omega^{\beta_k}, \omega^{\gamma_t})$ є ізольованою точкою в просторі $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$, то точка (a, b) є ізольованою в $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$.

Доведення. Припустимо $(\omega^{\beta_k}, \omega^{\gamma_t})$ є ізольованою точкою в $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$. Покладемо

$$a^* = n_1\omega^{\beta_1} + n_2\omega^{\beta_2} + ... + (n_k - 1)\omega^{\beta_k}$$

і

$$b^* = m_1\omega^{\gamma_1} + n_2\omega^{\gamma_2} + ... + (n_t - 1)\omega^{\gamma_t}.$$

Тоді

$$(0, a^*) \cdot (a, b) \cdot (b^*, 0) = (\omega^{\beta_k}, \omega^{\gamma_t}).$$

З нарізної неперервності напівгрупової операції в $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$ випливає, що існує такий відкритий окіл $V((a, b))$ елемента (a, b), що

$$(0, a^*) \cdot V((a, b)) \cdot (b^*, 0) = \{(\omega^{\beta_k}, \omega^{\gamma_t})\}.$$

Зафіксуємо довільний елемент $(c,d) \in V((a,b))$. Очевидно, що

$$(0,a^*)\cdot(c,d)\cdot(b^*,0) = (\omega^{\beta_k},\omega^{\gamma_t})$$

лише у випадку, коли $a^* \leqslant c$ і $b^* \leqslant d$. Тоді

$$(0,a^*)\cdot(c,d)\cdot(b^*,0) = (c-a^*,d-b^*) = (\omega^{\beta_k},\omega^{\gamma_t}).$$

З останньої рівності випливає, що $c=a$ і $d=b$, а отже $V((a,b)) = \{(a,b)\}$.

□

Твердження 3.1.7. *Нехай $a \in \omega^\alpha$ – довільний неграничний ординал. Тоді для довільного ординалу $b \in \omega^\alpha$ обидва елементи (a,b) та (b,a) є ізольованими точками в напівтопологічному моноїді $(\mathfrak{B}_\alpha,\tau)$.*

Доведення. З наслідка 3.1.4 та леми 3.1.6 випливає, що обидві точки (a,b) і (b,a) є ізольованими в просторі $(\mathfrak{B}_\alpha,\tau)$, якщо b є неграничним ординалом. Тому достатньо розглянути випадок, коли b є граничним ординалом. Припустимо протилежне: (a,b) не є ізольованою точкою в просторі $(\mathfrak{B}_\alpha,\tau)$. З того, що $(a,b)\cdot(b,0)=(a,0)$, з нарізної неперервності напівгрупової операції в $(\mathfrak{B}_\alpha,\tau)$ та з лем 3.1.2 і 3.1.3 випливає, що існує такий відкритий окіл $V((a,b))$ точки (a,b), що задовільняє умовам леми 3.1.3 та $V((a,b))\cdot(b,0) = \{(a,0)\}$. Зафіксуємо довільний елемент $(c,d) \in V(a,b)\setminus\{(a,b)\}$. Тоді

$$(c,d)\cdot(b,0) = (c+(b-d),0) = (a,0).$$

Звідси випливає, що $a = c+(b-d)$. З того, що b є граничним ординалом випливає, що $b-d$ також є граничним ординалом. А тому $c+(b-d)$ є граничним ординалом, що суперечить припущенню, що a – неграничний ординал. Доведення того, що (b,a) є ізольованою точкою в просторі $(\mathfrak{B}_\alpha,\tau)$ є аналогічним. □

3.2. Локально компактні напівгрупові топології на α-біциклічному моноїді $\mathfrak{B}_\alpha$

Теорема 3.2.1. *Для довільного ординалу $\alpha < \omega + 1$ єдиною гаусдорфовою локально копмактною напівгруповою топологією, на α-біциклічному моноїді $\mathfrak{B}_\alpha$ є дискретна топологія.*

Доведення. Нехай $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$ – напівтопологічна напівгрупа. З лем 3.1.5 та 3.1.6 випливає, що якщо для довільного ординалу $a \in \alpha$ елемент (ω^a, ω^a) моноїда $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$ є ізольованою точкою, то τ – дискретна топологія.

Очевидно, що множина $\{(n, m) : n, m < \omega\} \cup \{\omega, \omega\}$ з індукованою напівгруповою операцією з $\mathfrak{B}_\alpha$ ізоморфна біциклічній напівгрупі з приєднаним нулем. Тоді за лемою 3.1.3 та наслідком 33, (ω, ω) є ізольованою точкою в просторі $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$.

Припустимо $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$ не є дискретною напівгрупою. Нехай m таке найменше натуральне число, що ідемпотент (ω^m, ω^m) є неізольованою точкою в $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$. Зауважимо, що у такому випадку з лем 3.1.5 та 3.1.6 випливає, що $\{(a, b) : a, b < \omega^m\}$ є дискретною піднапівгрупою в $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$, яка алгебраїчно ізоморфна напівгрупі $\mathfrak{B}_m$. За лемою 3.1.3 існує такий відкритий компактний окіл $W((\omega^m, \omega^m))$ точки (ω^m, ω^m) в $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$, що

$$W((\omega^m, \omega^m)) \subset \mathfrak{B}_m \cup \{(\omega^m, \omega^m)\}.$$

З неперервності напівгрупової операції в $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$ випливає, що існує такий компактний відкритий окіл $V((\omega^m, \omega^m)) \subseteq W((\omega^m, \omega^m))$ точки (ω^m, ω^m), що $(0, 0) \notin V^2((\omega^m, \omega^m))$. З того, що $V((\omega^m, \omega^m))$ є компактним простором і (ω^m, ω^m) – єдина неізольована точка в $V((\omega^m, \omega^m))$ випливає, що елемент (ω^m, ω^m) є граничною точкою довільної нескінченної послідовності $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V((\omega^m, \omega^m))$.

Для довільного елемента $(y, 0) \in \mathfrak{B}_m$ покладемо

$$X_{(y,0)} = \{(0, x) : (y, 0) \cdot (0, x) = (y, x) \in V\}.$$

Припустимо, що існує такий елемент $(y,0)\in\mathfrak{B}_m$, що множина $X_{(y,0)}=\{(0,x_k):k\in\mathbb{N}\}$ є нескінченною. Зауважимо, що

$$(\omega^m,\omega^m)=\lim_{k\to\infty}((y,0)\cdot(0,x_k))=\lim_{k\to\infty}(y,x_k).$$

Тоді для довільного ординалу $z<\omega^m$ маємо, що

$$\lim_{k\to\infty}(z,x_k)=(\omega^m,\omega^m),$$

оскільки

$$\begin{aligned}(\omega^m,\omega^m)=(z,y)\cdot(\omega^m,\omega^m)=(z,y)\cdot\lim_{k\to\infty}(y,x_k)=\\=\lim_{k\to\infty}((z,y)\cdot(y,x_k))=\lim_{k\to\infty}(z,x_k).\end{aligned}$$

Для довільного $k\in\mathbb{N}$ через c_k позначимо найменший ординал такий, що $(x_k,c_k)\in V((\omega^m,\omega^m))$. З того, що $(0,0)\notin V^2((\omega^m,\omega^m))$ випливає, що існує число $k_0\in\mathbb{N}$ таке, що $c_k\neq 0$ для довільних $k>k_0$. Зауважимо, що елемент (ω^m,ω^m) є нулем в піднапівгрупі $\mathfrak{B}_m$. З неперервності напівгрупової операції в $(\mathfrak{B}_\alpha,\tau)$ випливає, що існує такий відкритий компактний окіл $O((\omega^m,\omega^m))\subseteq V((\omega^m,\omega^m))$ елемента (ω^m,ω^m), що

$$\begin{aligned}O((\omega^m,\omega^m))\cdot(1,0)\cup O((\omega^m,\omega^m))\cdot(\omega,0)\cup\ldots\cup O((\omega^m,\omega^m))\cdot(\omega^{m-1},0)\subseteq\\\subseteq V((\omega^m,\omega^m)).\end{aligned}$$

Але тоді нескінчений замкнений дискретний простір $\{(x_k,c_k):k\in\mathbb{N}\}$ міститься в $V((\omega^m,\omega^m))\setminus O((\omega^m,\omega^m))$, що суперечить компактності околу $V((\omega^m,\omega^m))$. З отриманого протиріччя випливає, що множина $X_{(y,0)}$ є скінченною, для довільного елемента $(y,0)\in\mathfrak{B}_m$.

З того, що $V((\omega^m,\omega^m))$ є нескінченною множиною випливає, що існує така нескінчена підмножина

$$A=\{(y_n,0):n\in\mathbb{N}\}\subset\mathfrak{B}_m,$$

що $X_{(y_n,0)}\neq\varnothing$ для всіх $(y_n,0)\in A$. Для довільного елемента $(y_n,0)\in A$ через $(0,z_{y_n})$ позначимо елемент множини $X_{(y_n,0)}$, що має найбільшу другу координату. Легко бачити, що $(y_n, 0)\cdot(0, z_{y_n}) = (y_n, z_{y_n})$, а тому множина $((y_n, z_{y_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ є нескінченною послідовністю в $V((\omega^m, \omega^m))$. Тоді отримуємо, що

$$\lim_{n\to\infty}(y_n, z_{y_n}) = (\omega^m, \omega^m).$$

Проте

$$(\omega^m, \omega^m) = (\omega^m, \omega^m)\cdot(0, \omega^{m-1}) = \lim_{n\to\infty}(y_n, z_{y_n})\cdot(0, \omega^{m-1}) = \\ = \lim_{n\to\infty}(y_n, \omega^{m-1} + z_{y_n}) \neq (\omega^m, \omega^m),$$

оскільки $\omega^{m-1} + z_{y_n} > z_{y_n}$, що суперечить неперервності напівгрупової операції в $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$. З отриманого протиріччя випливає, що $(\mathfrak{B}_\alpha, \tau)$ є дискретним простором. $\square$

Наступний приклад показує, що існує недискретна локально компактна топологія τ_{lc} на α-біциклічному моноїді $\mathfrak{B}_{\omega+1}$ така, що $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$ є топологічною інверсною напівгрупою.

Приклад 3.2.2. Визначимо топологію τ_{lc} на $\mathfrak{B}_{\omega+1}$ наступним чином: усі точки, відмінні від точок вигляду $(n\omega^\omega, m\omega^\omega)$, де $n, m \in \mathbb{N}$ є ізольованими. Сім'я

$$\mathcal{B}((n\omega^\omega, m\omega^\omega)) = \{U_k((n\omega^\omega, m\omega^\omega)) : k \in \mathbb{N}\}$$

задає базу топології τ_{lc} в точці $(n\omega^\omega, m\omega^\omega)$, де

$$U_k((n\omega^\omega, m\omega^\omega)) = \{((n-1)\omega^\omega + \omega^t, (m-1)\omega^\omega + \omega^t) : t > k\} \cup \{(n\omega^\omega, m\omega^\omega)\}.$$

Очевидно, що τ_{lc} є гаусдорфовою топологією на $\mathfrak{B}_{\omega+1}$. З того, що кожен базовий відкритий окіл довільної неізольованої точки $(n\omega^\omega, m\omega^\omega)$ є компактним маємо, що $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$ є локально компактним простором.

Легко бачити, що для довільного натурального числа k

$$U_k^{-1}(n\omega^\omega, m\omega^\omega) = U_k(m\omega^\omega, n\omega^\omega).$$

Звідси випливає, що інверсія є неперервною в $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$.

Надалі дещо модифікуємо нормальну форму Кантора довільного ординалу $a < \omega^{\omega+1}$:

$$a = n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + \ldots + n_p\omega^{t_p},$$

де n_1 – невід'ємне ціле число, $n_2, \ldots, n_p$ – натуральні числа, а $\omega, t_2, t_3, \ldots, t_p$ – спадна послідовність ординалів.

Достатньо перевірити неперервність напівгрупової операції в точці $((a, b), (c, d)) \in \mathfrak{B}_{\omega+1} \times \mathfrak{B}_{\omega+1}$, коли хоча б одна з точок (a, b) або (c, d) є неізольованою в $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$. Отже достатньо розглянути такі три види добутків:

(1) $(n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega) \cdot (n\omega^\omega, m\omega^\omega)$, де $n, m, n_1, m_1 \in \mathbb{N}$;

(2) $(a, b) \cdot (n\omega^\omega, m\omega^\omega)$, де (a, b) є ізольованою точкою в $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$, $n, m \in \mathbb{N}$;

(3) $(n\omega^\omega, m\omega^\omega) \cdot (a, b)$, де (a, b) є ізольованою точкою в $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Розглянемо перший випадок. Розкладемо його на три підвипадки:

(1.1) якщо $m_1 < n$, то $(n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega) \cdot (n\omega^\omega, m\omega^\omega) = ((n_1+n-m_1)\omega^\omega, m\omega^\omega)$;

(1.2) якщо $m_1 = n$, то $(n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega) \cdot (n\omega^\omega, m\omega^\omega) = (n_1\omega^\omega, m\omega^\omega)$;

(1.3) якщо $m_1 > n$, то $(n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega) \cdot (n\omega^\omega, m\omega^\omega) = (n_1\omega^\omega, (m+m_1-n)\omega^\omega)$.

Розглянемо підвипадок (1.1). Нехай $U_k(((n_1+n-m_1)\omega^\omega, m\omega^\omega))$ є відкритим базовим околом точки $((n_1 + n - m_1)\omega^\omega, m\omega^\omega)$. Ми стверджуєм, що

$$U_k((n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega)) \cdot U_k((n\omega^\omega, m\omega^\omega)) \subseteq U_k(((n_1 + n - m_1)\omega^\omega, m\omega^\omega)).$$

Справді, зафіксуємо довільні елементи

$$((n_1 - 1)\omega^\omega + \omega^t, (m_1 - 1)\omega^\omega + \omega^t) \in U_k((n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega))$$

і

$$((n - 1)\omega^\omega + \omega^p, (m - 1)\omega^\omega + \omega^p) \in U_k((n\omega^\omega, m\omega^\omega)).$$

Тоді

$$((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t,(m_1-1)\omega^\omega+\omega^t)\cdot((n-1)\omega^\omega+\omega^p,(m-1)\omega^\omega+\omega^p)=$$
$$=((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t+((n-1)\omega^\omega+\omega^p-((m_1-1)\omega^\omega+\omega^t)),(m-1)\omega^\omega+$$
$$+\omega^p)=((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t+((n-1-m_1+1)\omega^\omega+\omega^p),(m-1)\omega^\omega+$$
$$+\omega^p)=((n_1-1+n-1-m_1+1)\omega^\omega+\omega^p,(m-1)\omega^\omega+\omega^p)=((n_1+$$
$$+n-m_1-1)\omega^\omega+\omega^p,(m-1)\omega^\omega+\omega^p)\in U_k(((n_1+n-m_1)\omega^\omega,m\omega^\omega)).$$

Розглянемо підвипадок (1.2). Нехай $U_k((n_1\omega^\omega,m\omega^\omega))$ є відкритим базовим околом точки $(n_1\omega^\omega,m\omega^\omega)$. Ми стверджуємо, що

$$U_k((n_1\omega^\omega,n\omega^\omega))\cdot U_k((n\omega^\omega,m\omega^\omega))\subseteq U_k((n_1\omega^\omega,m\omega^\omega)).$$

Справді, зафіксуємо довільні елементи

$$((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t,(n-1)\omega^\omega+\omega^t)\in U_k((n_1\omega^\omega,n\omega^\omega))$$

і

$$((n-1)\omega^\omega+\omega^p,(m-1)\omega^\omega+\omega^p)\in U_k((n\omega^\omega,m\omega^\omega)).$$

Якщо $p>t$, то

$$((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t,(n-1)\omega^\omega+\omega^t)\cdot((n-1)\omega^\omega+\omega^p,(m-1)\omega^\omega+\omega^p)=$$
$$=((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t+((n-1)\omega^\omega+\omega^p-((n-1)\omega^\omega+\omega^t)),(m-1)\omega^\omega+$$
$$+\omega^p)=((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t+(\omega^p-\omega^t),(m-1)\omega^\omega+\omega^p)=$$
$$=((n_1-1)\omega^\omega+\omega^p,(m-1)\omega^\omega+\omega^p)\in U_k((n_1\omega^\omega,m\omega^\omega)).$$

Якщо $p=t$, то

$$((n_1-1)\omega^\omega+\omega^p,(n-1)\omega^\omega+\omega^p)\cdot((n-1)\omega^\omega+\omega^p,(m-1)\omega^\omega+\omega^p)=$$
$$=((n_1-1)\omega^\omega+\omega^p,(m-1)\omega^\omega+\omega^p)\in U_k((n_1\omega^\omega,m\omega^\omega)).$$

Якщо $p<t$, то

$$((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t,(n-1)\omega^\omega+\omega^t)\cdot((n-1)\omega^\omega+\omega^p,(m-1)\omega^\omega+\omega^p)=$$
$$=((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t,(m-1)\omega^\omega+\omega^p+((n-1)\omega^\omega+\omega^t-((n-1)\omega^\omega+$$
$$+\omega^p)))=((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t,(m-1)\omega^\omega+\omega^p+(\omega^t-\omega^p))=$$
$$=((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t,(m-1)\omega^\omega+\omega^t)\in U_k((n_1\omega^\omega,m\omega^\omega)).$$

Розглянемо підвипадок (1.3). Нехай $U_k((n_1\omega^\omega,(m+m_1-n)\omega^\omega))$ є відкритим базовим околом точки $(n_1\omega^\omega,(m+m_1-n)\omega^\omega)$. Ми стверджуємо, що

$$U_k((n_1\omega^\omega,m_1\omega^\omega))\cdot U_k((n\omega^\omega,m\omega^\omega))\subseteq U_k((n_1\omega^\omega,(m+m_1-n)\omega^\omega)).$$

Справді, зафіксуємо довільні елементи

$$((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t,(m_1-1)\omega^\omega+\omega^t)\in U_k((n_1\omega^\omega,m_1\omega^\omega))$$

і

$$((n-1)\omega^\omega+\omega^p,(m-1)\omega^\omega+\omega^p)\in U_k((n\omega^\omega,m\omega^\omega)).$$

Тоді

$$((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t,(m_1-1)\omega^\omega+\omega^t)\cdot((n-1)\omega^\omega+\omega^p,(m-1)\omega^\omega+\omega^p)=$$
$$=((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t,(m-1)\omega^\omega+\omega^p+((m_1-1)\omega^\omega+\omega^t-$$
$$-((n-1)\omega^\omega+\omega^p)))=((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t,(m-1)\omega^\omega+\omega^p+$$
$$+((m_1-1-n+1)\omega^\omega+\omega^t))=((n_1-1)\omega^\omega+\omega^t,(m+m_1-n-1)\omega^\omega+$$
$$+\omega^t)\in U_k((n_1\omega^\omega,(m+m_1-n)\omega^\omega)).$$

Отже у випаку (1) напівгрупова операція в $(\mathfrak{B}_{\omega+1},\tau_{lc})$ є неперервною.

Розглянемо випадок (2). Розкладемо його на три підвипадки:

(2.1) $a\neq n_1\omega^\omega$ і $b\neq m_1\omega^\omega$;

(2.2) $a\neq n_1\omega^\omega$ і $b=m_1\omega^\omega$;

(2.3) $a=n_1\omega^\omega$ і $b\neq m_1\omega^\omega$.

Розглянемо підвипадок (2.1)

Нехай

$$a = n_1\omega^{\omega} + n_2\omega^{t_2} + \ldots + n_p\omega^{t_p} \qquad \text{і} \qquad b = m_1\omega^{\omega} + m_2\omega^{r_2} + \ldots + m_c\omega^{r_c}.$$

Зауважимо, що числа n_1 та m_1 можуть дорівнювати нулю. Тоді маємо такі два підвипадки:

(2.1.1) якщо $m_1 < n$, то

$$(n_1\omega^{\omega} + n_2\omega^{t_2} + \ldots + n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^{\omega} + m_2\omega^{r_2} + \ldots + m_c\omega^{r_c}) \cdot (n\omega^{\omega}, m\omega^{\omega}) =$$

$$= ((n_1 + n - m_1)\omega^{\omega}, m\omega^{\omega});$$

(2.1.2) якщо $m_1 \geqslant n$, то

$$(n_1\omega^{\omega} + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^{\omega} + m_2\omega^{r_2} + .. + m_c\omega^{r_c}) \cdot (n\omega^{\omega}, m\omega^{\omega}) =$$

$$= (n_1\omega^{\omega} + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p}, (m + m_1 - n)\omega^{\omega} + m_2\omega^{r_2} + .. + m_c\omega^{r_c});$$

Доведемо неперервність у підвипадку (2.1.1). Зафіксуємо відкритий базовий окіл $U_k(((n_1 + n - m_1)\omega^{\omega}, m\omega^{\omega}))$ точки $((n_1 + n - m_1)\omega^{\omega}, m\omega^{\omega})$. Зауважимо, що точка

$$(n_1\omega^{\omega} + n_2\omega^{t_2} + \ldots + n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^{\omega} + m_2\omega^{r_2} + \ldots + m_c\omega^{r_c})$$

є ізольованою в $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$. Ми стверджуємо, що

$$\begin{aligned}&(n_1\omega^{\omega} + n_2\omega^{t_2} + \ldots + n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^{\omega} + m_2\omega^{r_2} + \ldots \\ &\quad + m_c\omega^{r_c}) \cdot U_{r_2+t_2+k}((n\omega^{\omega}, m\omega^{\omega})) \subseteq U_k(((n_1 + n - m_1)\omega^{\omega}, m\omega^{\omega})).\end{aligned}$$

Справді, зафіксуємо довільний елемент

$$((n-1)\omega^{\omega} + \omega^{t}, (m-1)\omega^{\omega} + \omega^{t}) \in U_{r_2+t_2+k}((n\omega^{\omega}, m\omega^{\omega})).$$

Тоді

$$(n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + \ldots + n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + \ldots + m_c\omega^{r_c}) \cdot ((n-1)\omega^\omega +$$
$$+ \omega^t, (m-1)\omega^\omega + \omega^t) = (n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + \ldots + n_p\omega^{t_p} + ((n-1)\omega^\omega + \omega^t -$$
$$- (m_1\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + \ldots + m_c\omega^{r_c})), (m-1)\omega^\omega + \omega^t) =$$
$$= (n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + \ldots + n_p\omega^{t_p} + ((n-1-m_1)\omega^\omega + \omega^t, (m-1)\omega^\omega + \omega^t) =$$
$$((n_1+n-m_1-1)\omega^\omega + \omega^t, (m-1)\omega^\omega + \omega^t) \in U_k(((n_1+n-m_1)\omega^\omega, m\omega^\omega)).$$

Отже у підвипадку (2.1.1) напівгрупова операція неперервна в $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$.

Розглянемо підвипадок (2.1.2). Зауважимо, що обидва елементи

$$(n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + \ldots + n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + \ldots + m_c\omega^{r_c})$$

і

$$(n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + \ldots + n_p\omega^{t_p}, (m+m_1-n)\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + \ldots + m_c\omega^{r_c})$$

є ізольованими точками в $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$. Ми стверджуємо, що

$$(n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + \ldots + n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + \ldots$$
$$+ m_c\omega^{r_c}) \cdot U_0((n\omega^\omega, m\omega^\omega)) = \{(n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + \ldots + n_p\omega^{t_p}, (m+m_1-$$
$$- n)\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + \ldots + m_c\omega^{r_c})\}.$$

Справді, зафіксуємо довільний елемент

$$((n-1)\omega^\omega + \omega^t, (m-1)\omega^\omega + \omega^t) \in U_0((n\omega^\omega, m\omega^\omega)).$$

Тоді

$$(n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + .. + m_c\omega^{r_c}) \cdot ((n-1)\omega^\omega +$$
$$+ \omega^t, (m-1)\omega^\omega + \omega^t) = (n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p}, (m-1)\omega^\omega + \omega^t +$$
$$+ (m_1\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + .. + m_c\omega^{r_c} - ((n-1)\omega^\omega + \omega^t))) = (n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + ..$$
$$+ n_p\omega^{t_p}, (m-1)\omega^\omega + \omega^t + ((m_1-n+1)\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + .. + m_c\omega^{r_c}) =$$
$$(n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p}, (m+m_1-n)\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + .. + m_c\omega^{r_c}).$$

Отже у підвипадку (2.1) напівгрупова операція є непрервною в $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$.

Розглянемо підвипадок (2.2). Нехай

$$a = n_1\omega^{\omega} + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p} \qquad \text{і} \qquad b = m_1\omega^{\omega}.$$

Тоді ми маємо такі два підвипадки:

(2.2.1) якщо $m_1 < n$, то

$$(n_1\omega^{\omega}+n_2\omega^{t_2}+..+n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^{\omega})\cdot(n\omega^{\omega}, m\omega^{\omega}) = ((n_1+n-m_1)\omega^{\omega}, m\omega^{\omega});$$

(2.2.2) якщо $m_1 \geqslant n$, то

$$\begin{aligned}&(n_1\omega^{\omega} + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^{\omega}) \cdot (n\omega^{\omega}, m\omega^{\omega}) =\\ &= (n_1\omega^{\omega} + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p}, (m + m_1 - n)\omega^{\omega});\end{aligned}$$

Розглянемо підвипадок (2.2.1). Нехай $U_k(((n_1 + n - m_1)\omega^{\omega}, m\omega^{\omega}))$ є довільним відкритим базовим околом точки $((n_1 + n - m_1)\omega^{\omega}, m\omega^{\omega})$. Зауважимо, що елемент $(n_1\omega^{\omega} + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^{\omega})$ є ізольованою точкою в $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$. Ми стверджуємо, що

$$\begin{aligned}&(n_1\omega^{\omega} + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^{\omega}) \cdot U_{t_2+k}((n\omega^{\omega}, m\omega^{\omega})) \subseteq\\ &\subseteq U_k(((n_1 + n - m_1)\omega^{\omega}, m\omega^{\omega})).\end{aligned}$$

Справді, зафіксуємо довільний елемент

$$((n - 1)\omega^{\omega} + \omega^t, (m - 1)\omega^{\omega} + \omega^t) \in U_{t_2+k}((n\omega^{\omega}, m\omega^{\omega})).$$

Тоді

$$\begin{aligned}&(n_1\omega^{\omega} + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^{\omega}) \cdot ((n - 1)\omega^{\omega} + \omega^t, (m - 1)\omega^{\omega} + \omega^t) =\\ &(n_1\omega^{\omega} + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p} + ((n - 1)\omega^{\omega} + \omega^t - m_1\omega^{\omega}), (m - 1)\omega^{\omega} + \omega^t) =\\ &(n_1\omega^{\omega} + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p} + ((n - 1 - m_1)\omega^{\omega} + \omega^t), (m - 1)\omega^{\omega} + \omega^t) =\\ &((n_1 + n - m_1 - 1)\omega^{\omega} + \omega^t, (m - 1)\omega^{\omega} + \omega^t) \in U_k(((n_1 + n - m_1)\omega^{\omega}, m\omega^{\omega})).\end{aligned}$$

Отже у підвипадку (2.2.1) напівгрупова операція неперервна в $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$.

Розглянемо підвипадок (2.2.2). Зауважимо, що обидві точки

$$(n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^\omega)$$

і

$$(n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p}, (m + m_1 - n)\omega^\omega)$$

є ізольованими в $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$. Ми стверджуємо, що

$$(n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^\omega) \cdot U_0((n\omega^\omega, m\omega^\omega)) =$$
$$= \{(n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p}, (m + m_1 - n)\omega^\omega)\}.$$

Справді, зафіксуємо довільний елемент

$$((n-1)\omega^\omega + \omega^t, (m-1)\omega^\omega + \omega^t) \in U_0((n\omega^\omega, m\omega^\omega)).$$

Тоді

$$(n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p}, m_1\omega^\omega) \cdot ((n-1)\omega^\omega + \omega^t, (m-1)\omega^\omega + \omega^t) =$$
$$= (n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p}, (m-1)\omega^\omega + \omega^t + (m_1\omega^\omega - ((n-1)\omega^\omega +$$
$$\omega^t))) = (n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p}, (m-1)\omega^\omega + \omega^t + ((m_1 - n + 1)\omega^\omega) =$$
$$= (n_1\omega^\omega + n_2\omega^{t_2} + .. + n_p\omega^{t_p}, (m + m_1 - n)\omega^\omega).$$

Отже у підвипадку (2.2) напівгрупова операція є неперервною в $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$.

Розглянемо підвипадок (2.3).

Нехай

$$a = n_1\omega^\omega \qquad \text{і} \qquad b = m_1\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + .. + m_c\omega^{r_c}.$$

Тоді маємо такі два підвипадка:

(2.3.1) якщо $m_1 < n$, то

$$(n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega + \ldots + m_c\omega^{r_c}) \cdot (n\omega^\omega, m\omega^\omega) = ((n_1 + n - m_1)\omega^\omega, m\omega^\omega);$$

(2.3.2) якщо $m_1 \geqslant n$, то

$$(n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + \ldots + m_c\omega^{r_c}) \cdot (n\omega^\omega, m\omega^\omega) =$$
$$= (n_1\omega^\omega, (m + m_1 - n)\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + \ldots + m_c\omega^{r_c});$$

Розглянемо підвипадок (2.3.1). Нехай $U_k(((n_1+n-m_1)\omega^\omega, m\omega^\omega))$ – довільний відкритий базовий окіл точки $((n_1+n-m_1)\omega^\omega, m\omega^\omega)$. Ми стверджуємо, що

$$(n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + \ldots + m_c\omega^{r_c}) \cdot U_{r_2+k}((n\omega^\omega, m\omega^\omega)) \subseteq$$
$$\subseteq U_k(((n_1+n-m_1)\omega^\omega, m\omega^\omega)).$$

Справді, зафіксуємо довільний елемент

$$((n-1)\omega^\omega + \omega^t, (m-1)\omega^\omega + \omega^t) \in U_{r_2+k}((n\omega^\omega, m\omega^\omega)).$$

Тоді

$$(n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + \ldots + m_c\omega^{r_c}) \cdot ((n-1)\omega^\omega + \omega^t, (m-1)\omega^\omega + \omega^t) =$$
$$= (n_1\omega^\omega + ((n-1)\omega^\omega + \omega^t - (m_1\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + \ldots + m_c\omega^{r_c})), (m-1)\omega^\omega +$$
$$+ \omega^t) = (n_1\omega^\omega + ((n-1-m_1)\omega^\omega + \omega^t), (m-1)\omega^\omega + \omega^t) = ((n_1+n-$$
$$- m_1 - 1)\omega^\omega + \omega^t, (m-1)\omega^\omega + \omega^t) \in U_k(((n_1+n-m_1)\omega^\omega, m\omega^\omega)).$$

Отже у підвипадку (2.3.1) напівгрупова операція неперервна в $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$.

Розглянемо підвипадок (2.3.2). Зауважимо, що обидві точки

$$(n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + \ldots + m_c\omega^{r_c})$$

та

$$(n_1\omega^\omega, (m+m_1-n)\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + \ldots + m_c\omega^{r_c})$$

є ізольованими в $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$. Ми стверджуємо, що

$$(n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + \ldots + m_c\omega^{r_c}) \cdot U_0((n\omega^\omega, m\omega^\omega)) =$$
$$= \{(n_1\omega^\omega, (m+m_1-n)\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + \ldots + m_c\omega^{r_c})\}.$$

Справді, зафіксуємо довільний елемент

$$((n-1)\omega^\omega + \omega^t, (m-1)\omega^\omega + \omega^t) \in U_0((n\omega^\omega, m\omega^\omega)).$$

Тоді

$$(n_1\omega^\omega, m_1\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + \ldots + m_c\omega^{r_c}) \cdot ((n-1)\omega^\omega + \omega^t, (m-1)\omega^\omega + \omega^t) =$$
$$= (n_1\omega^\omega, (m-1)\omega^\omega + \omega^t + (m_1\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + \ldots + m_c\omega^{r_c} - ((n-1)\omega^\omega +$$
$$+ \omega^t))) = (n_1\omega^\omega, (m-1)\omega^\omega + \omega^t + ((m_1 - n + 1)\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + ...$$
$$+ m_c\omega^{r_c}) = (n_1\omega^\omega, (m + m_1 - n)\omega^\omega + m_2\omega^{r_2} + \ldots + m_c\omega^{r_c}).$$

Отже у випадку (2) напівгрупова операція є неперервною в $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$.

Зауважимо, що

$$((a, b) \cdot (n\omega^\omega, m\omega^\omega))^{-1} = (m\omega^\omega, n\omega^\omega) \cdot (b, a).$$

Тоді з неперервності інверсії в $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$ і неперервності напівгрупової операції у випадку (2) випливає неперервність напівгрупової операції у випадку (3).

Отже $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$ є топологічною інверсною напівгрупою.

Висновки. В цьому розділі показано, що α-біциклічний моноїд $\mathfrak{B}_\alpha$ алгебраїчно ізоморфний напівгрупі усіх порядкових ізоморфізмів між головними верхніми підмножинами ординалу ω^α. Доведено, що для довільного ординалу α, для довільного елементу (a, b) напівтопологічного моноїда $\mathfrak{B}_\alpha$ з того, що один з елементів a або b не є граничним ординалом випливає, що (a, b) є ізольованою точкою в $\mathfrak{B}_\alpha$. Показано, що для довільного ординалу $\alpha < \omega + 1$ довільна локально компактна напівгрупова топологія на моноїді $\mathfrak{B}_\alpha$ є дискретною та побудувано приклад недискретної локально компактної топології τ_{lc} на моноїді $\mathfrak{B}_{\omega+1}$ такої, що $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$ є топологічною інверсною напівгрупою.

Основні результати цього розділу опубліковано в статті [20].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджені топологізація, вкладення і замикання λ-поліциклічного моноїда, топологізація α-біциклічної напівгрупи, а також розв'язано проблему Степпа (див. [120, питання 17]). Були отримані наступні результати:

1. Описано всі H-поповнення та AH-поповнення дискретних напівграток $(\mathbb{N}, \max)$ та $(\mathbb{N}, \min)$, та доведено, що для дискретних напівграток $(\mathbb{N}, \max)$ та $(\mathbb{N}, \min)$ не існує універсального H-поповнення.
2. Розв'язано проблему Степпа, а саме, побудовано приклад H-замкненої але не абсолютно H-замкненої топологічної напівгратки. Більше того, для довільного нескінченного кардиналу λ побудовано приклад H-замкненої топологічної напівгратки, яка допускає 2^λ неперервних відкрито-замкнених гомоморфних образів, які не є H-замкненими топологічними напівгратками.
3. Показано, що довільний ненульовий елемент x напівтопологічного λ-поліциклічного моноїда $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$ є ізольованою точкою в $(\mathcal{P}_\lambda, \tau)$. Доведено, що єдиною гаусдорфовою локально компактною напівгруповою топологією на $\mathcal{P}_\lambda$ є дискретна топологія, а також, що локально компактний напівтопологічний λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ є або дискретним, або компактним простором.
4. Описано всі слабко-компактні топології, що перетворюють $\mathcal{P}_\lambda$ на напівтопологічну напівгрупу і доведено, що не існує слабко компактної топологічної напівгрупи, що містить $\mathcal{P}_\lambda$ як щільну піднапівгрупу.
5. Знайдено достатні умови для того, щоб топологічний інверсний λ-поліциклічний моноїд $\mathcal{P}_\lambda$ був абсолютно H-замкненим в класі топологічних інверсних напівгруп, побудовано найслабшу топологію

τ_{mi} на $\mathcal{P}_\lambda$ таку, що $(\mathcal{P}_\lambda, \tau_{mi})$ є топологічною інверсною напівгрупою, і доведено, що дискретний моноїд $\mathcal{P}_2$ не є H-замкненим у класі топологічних інверсних напівгруп.

6. Доведено, що для довільного елемента (a, b) напівтопологічного α-біциклічного моноїда $\mathfrak{B}_\alpha$ з того, що a або b не є граничним ординалом випливає, що (a, b) є ізольованою точкою в $\mathfrak{B}_\alpha$, і показано, що для довільного ординалу $\alpha < \omega + 1$ довільна локально компактна напівгрупова топологія на моноїді $\mathfrak{B}_\alpha$ є дискретною. Також побудовано приклад недискретної локально компактної топології τ_{lc} на моноїді $\mathfrak{B}_{\omega+1}$ такої, що $(\mathfrak{B}_{\omega+1}, \tau_{lc})$ є топологічною інверсною напівгрупою.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вагнер, В.: Обобщенные группы. ДАН СССР **84**, 1119-1122 (1952).
2. Гутік, О., Павлик, К.: H-замкнені топологічні напівгрупи та λ-розширення Брандта. Математичні методи та фізико-механічні поля **44**(3), 20–28 (2001).
3. Гутік, О., Рейтер, А.: Про напівтопологічні симетричні інверсні півгрупи обмеженого скінченного рангу. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **72**, 94–106 (2010).
4. Марков, А.: О свободных топологических группах. Известия Акад. Наук СССР **9**, 3–64 (1945).
5. Ольшанский, А.: Замечание о счетной нетопологизируемой группе. Вестник Московского университета **3**, 103 (1980).
6. Райков, Д.: О пополнении топологических групп. Известия академии наук СССР **10**, 513–528 (1946).
7. Тайманов, А.: Пример полугруппы, допускающей только дискретную топологию. Алгебра и логика **12**(1), 114–116 (1973).
8. Хилле, Э., Филлипс, Р.: Функциональный анализ и полугруппы. Иностранная литература, Москва (1962).
9. Энгелькинг, Р.: Общая топология. Мир, Москва (1986).
10. Зеленюк, Є.: К альтернативе Понтрягина для топологических полугрупп. Мат. Заметки **44**(3), 402—403 (1988).
11. Alexandroff, P., Urysohn, P.: Sur les espaces topologiques compacts. Bull. Intern. Acad. Pol. Sci. 5–8 (1923).
12. Andersen, O.: Ein Bericht über die Struktur abstrakter Halbgruppen. Dissertation, University of Hamburg (1952).

13. Anderson, L., Hunter, R., Koch, R.: Some results on stability in semigroups. Trans. Amer. Math. Soc. **117**, 521–529 (1965).
14. Arkhangel'skii, A.: Topological Function Spaces. Kluwer, Dordrecht (1992).
15. Arhangel'skii, A., Choban, M.: Semitopological groups and the theorems of Montgomery and Ellis. C. R. Acad. Bulg. Sci. **62**(8), 917–922 (2009).
16. Banakh, T., Dimitrova, S.: Openly factorizable spaces and compact extensions of topological semigroups. Commentat. Math. Univ. Carol. **51**(1), 113–131 (2010).
17. Banakh, T., Dimitrova, S., Gutik, O.: The Rees-Suschkiewitsch Theorem for simple topological semigroups. Мат. студ. **31**(2), 211–218 (2009).
18. Banakh, T., Dimitrova, S., Gutik, O.: Embedding the bicyclic semigroup into countably compact topological semigroups. Topology Appl. **157**(18), 2803–2814 (2010).
19. Banaschewski, B.: Minimal topological algebras. Math. Ann. **211**, 107–114 (1974).
20. Bardyla, S.: On a semitopological α-bicyclic monoid. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **81**, 9–22 (2016).
21. Bardyla, S.: Classifying locally compact semitopological polycyclic monoids. Мат. вісник НТШ **13**, 21–28 (2016).
22. Bardyla, S., Gutik O.: On H-complete topological semilattices. Мат. студ. **38**(2), 118–123 (2012).
23. Bardyla, S., Gutik, O.: On a semitopological polycyclic monoid. Algebra Discr. Math. **21**(2), 163–183 (2016).
24. Bardyla, S., Gutik, O.: On a complete topological inverse polycyclic monoid. Карпатські математичні публікації **8**(2), 183–194 (2016).
25. Bardyla, S., Gutik, O., Ravsky, A.: H-closed quasitopological groups. Topology Appl. **217**, 51–58 (2017).

26. Bardyla, S., Gutik, O.: An example of an H-complete topological semilattice which is not AH–complete. In: Abstracts of the International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach, p. 76. University of Lviv, Lviv, 17–21 September 2012.
27. Bardyla, S., Gutik, O.: On H-complete topological semilattices. In: Abstracts of the 9th International Algebraic Conference in Ukraine, p. 20. University of Lviv, Lviv, 8–13 July 2013.
28. Bardyla, S., Gutik, O.: On a semitopological λ-polycyclic monoid. Тези доповідей Наукової конференції присвяченої 100-річчю від народження К. М. Фішмана і М. К. Фаге, с. 134–135. Чернівецький університет, Чернівці, 1–4 липня 2015 р.
29. Bardyla, S., Gutik, O., Ravsky, A.: H-closed quasitopological groups. Тези доповідей X Літньої школи "Алгебра, Топологія, Аналіз", с. 67. Одеська національна академія харчових технологій, Одеса, 3–15 серпня 2015 р.
30. Bardyla, S., Gutik, O., Ravsky, A.: H-closed quasitopological groups. In: Abstracts of the International Conference "Geometry and topology in Odessa - 2016", p. 13. Odessa National Academy of Food Technologies, Odessa, 2–8 June 2016.
31. Bardyla, S., Gutik, O., Ravsky, A.: H-closed quasitopological groups. In: Abstracts of the 7th European Congress of Mathematics, p. 379. Technical University of Berlin, Berlin, 18–22 July 2016.
32. Bardyla, S., Gutik, O.: On the embeddings and closures of a topological λ-polycyclic monoid. Тези доповідей XI Літньої школи "Алгебра, Топологія, Аналіз", с. 34. Одеська національна академія харчових технологій, Одеса, 1–14 серпня 2016 р.
33. Bardyla, S., Gutik, O.: On the embeddings and closures of a topological λ-polycyclic monoid. In: Abstracts of the International Conference dedicated to the 120th anniversary of Kazimierz Kuratowski, p. 9. University of Lviv,

Lviv, 27 September–1 October 2016.

34. Bardyla, S.: On the semitopological locally compact α-bicyclic monoid In: Abstracts of Winter School in Abstract Analysis, section Set theory and Topology. Hejnice, Czech Republic, 28 January–4 February 2017.
35. Berglund, J., Hoffman, K.: Compact semitopological semigroups and weakly almost periodic functions. Lecture Notes in Mathematics, vol. 42, 160 pp. Springer-Verlag, Berlin-New York (1967).
36. Berglund, J., Junghenn, H., Milnes, P.: Compact right topological semigroups and generalizations of almost periodicity. Lecture Notes in Mathematics, vol. 663, 243 pp. Springer, Berlin (1978).
37. Berglund, J., Junghenn, H., Milnes, P.: Analysis on semigroups. Wiley, New York (1989).
38. Berezovski, T., Gutik, O., Pavlyk, K.: Brandt extensions and primitive topological inverse semigroups. Int. J. Math. Sci. **3**, 83–96 (2010).
39. Berri, M., Porter, J., Stephenson, R.: A survey of minimal topological spaces. Academic. Praha, 93–114 (1971).
40. Bertman, M., West, T.: Conditionally compact bicyclic semitopological semigroup. Proc. Roy. Irish Acad. **76**, 219–226 (1976).
41. Bruck, R.: A survey of binary system. Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg (1958).
42. Carruth, J., Hildebrant, R., Koch, J.: The Theory of Topological Semigroups. Marcel Dekker Inc., New York and Basel: Vol. I, 244 pp. (1983); Vol. II, 196 pp. (1986).
43. Chuchman, I., Gutik, O.: On H-closed topological semigroups and semilattices. Algebra Discr. Math. **1**, 13–23 (2007).
44. Chuchman, I., Gutik, O.: Topological monoids of almost monotone injective co-finite partial selfmaps of the set of positive integers. Карпатські математичні публікації **2**(1), 119–132 (2010).

45. Chuchman, I., Gutik, O.: On monoids of injective partial selfmaps almost everywhere the identity. Demonstr. Math. **44**(4), 699–722 (2011).
46. Chuchman, I., Guran, I., Gutik, O., Ravsky, A.: Symmetric topological groups and semigroups. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **74**, 61–73 (2011).
47. Clifford, A., Preston, G.: The Algebraic Theory of Semigroups. Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I. Vol. I, 244 pp. (1963); Vol. II, 350 pp. (1967).
48. Cowan, D., Reilly, N.: Partial cross-sections of symmetricinverse semigroups. Int. J. Algebra Comput. **5**, 259–287 (1995).
49. DeLeeuw, K., Glicksberg, I.: Almost-periodic functions on semigroups. Acta Math. **105**, 99–140 (1961).
50. Dikranjan, D., Uspenskij, V.: Categorically compact topological groups. J. Pure Appl. Algebra **126**, 149–168 (1998).
51. Doïtchinov, D.: Produits de groupes topologiques minimaux. Bull. Sci. Math. **97**(2), 59–64 (1972).
52. Dunkl, C., Ramirez, D.: Representations of commutative semitopological semigroups. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 435, 181 pp. Springer-Verlag, Berlin-New York (1975).
53. Eberhart, C., Selden, J.: On the closure of the bicyclic semigroup. Trans. Amer. Math. Soc. **144**, 115–126 (1969).
54. Faucett, W.: Compact semigroups irreducibly connected between two idempotents. Proc Amer. Math. Soc. **6**, 741-747 (1955).
55. Faucett, W.: Topological semigroups and continua with cut points. Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 748-756 (1955).
56. Fihel, I., Gutik, O.: On the closure of the extended bicyclic semigroup. Карпатські математичні публікації **3**(2), 131–157 (2011).
57. Filali, M., Protasov, I.: Ultrafilters and Topologies on Groups. ВНТЛ-Класика, Львів (2008).

58. Gierz, G., Hofmann K., Keimel, K., Lawson J., Mislove, M., Scott, D.: A compendium of continuous lattices. Springer-Verlag, Berlin-New York (1980).
59. Gierz, G., Hofmann K., Keimel, K., Lawson J., Mislove, M., Scott, D.: Continuous Lattices and Domains. Cambridge Univ. Press, Cambridge (2003).
60. Green, J.: On the structure of semigroups. Ann. Math. **54**(2), 163-–172 (1951).
61. Gutik, O.: On closures in semitopological inverse semigroups with continuous inversion. Algebra Discr. Math. **18**(1), 59–85 (2014).
62. Gutik, O.: On the dichotomy of a locally compact semitopological bicyclic monoid with adjoined zero. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **80**, 33–41 (2015).
63. Gutik, O.: Topological properties of Taimanov semigroups. Мат. вісник НТШ **13**, 29–34 (2016).
64. Gutik, O., Lawson, J., Repovs, D.: Semigroup closures of finite rank symmetric inverse semigroups. Semigroup Forum **78**(2), 326–336 (2009).
65. Gutik, O., Pagon, D., Repovs, D.: On chains in H-closed topological pospaces. Order **27**(1), 69–81 (2010).
66. Gutik, O., Pavlyk, K.: Topological Brandt λ-extensions of absolutely H-closed topological inverse semigroups. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **61**, 98–105 (2003).
67. Gutik, O., Pavlyk, K.: Topological semigroups of matrix units. Algebra Discrete Math. **3**, 1–17 (2005).
68. Gutik, O., Pavlyk, K., Reiter, A.: Topological semigroups of matrix units and countably compact Brandt λ^0-extensions. Мат. Студ. **32**(2), 115–131 (2009).
69. Gutik, O., Ravsky, A.: Pseudocompactness, products and Brandt λ^0-extensions of semitopological monoids. Математичні методи та фізико-

механічні поля **58**(2), 20–37 (2015).

70. Gutik, O., Reiter, A.: Symmetric inverse topological semigroups of finite rank $\leqslant n$. Математичні методи та фізико-механічні поля **52**(3), 7–14 (2009).
71. Gutik, O., Repovs, D.: On countably compact 0-simple topological inverse semigroups. Semigroup Forum **75**(2), 464–469 (2007).
72. Gutik, O., Repovs, D.: On linearly ordered H-closed topological semilattices. Semigroup Forum **77**(3), 474–481 (2008).
73. Gutik, O., Repovs, D.: Topological monoids of monotone injective partial selfmaps of $\mathbb{N}$ with cofinite domain and image. Stud. Sci. Math. Hung. **48**(3), 342–353 (2011).
74. Gutik, O., Repovs, D.: On monoids of monotone injective partial selfmaps of integers with cofinite domains and images. Georgian Math. J. **19**(3), 511–532 (2012).
75. Hewitt, E.: Compact monothetic semigroups. Duke Math. J. **23**(3), 447–457 (1956).
76. Higgins, P.: Techniques of Semigroup Theory. Oxford Univ. Press, New York (1992).
77. Hildebrant, J., Koch, R.: Swelling actions of Γ-compact semigroups. Semigroup Forum **33**(1), 65–85 (1986).
78. Hilgert, J., Neeb, K.: Lie semigroups and their applications. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1552, 315 pp. Springer-Verlag, Berlin (1993).
79. Hindman, N., Strauss, D.: Algebra in the Stone-Čech Compactification. De Gruyter, Berlin (1998).
80. Hofmann, K., Mostert, P.: Elements of compact semigroups. C. E. Merrill Books, Columbus, Ohio (1966).
81. Hofmann, K.: The duality of compact semigroups and C^*-algebras. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 129, 142 pp. Springer-Verlag, Berlin-New York (1970).

82. Hofmann, K., Keimel, K.: A general character theory for partially ordered sets and lattices. Memoirs of the American Mathematical Society, Vol. 122, 121 pp. American Mathematical Society, Providence, R.I. (1972).
83. Hofmann, K., Mislove, M., Stralka, A.: The Pontryagin duality of compact 0-dimensional semilattices and its applications. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 396, 122 pp. Springer-Verlag, Berlin-New York (1974).
84. Hofmann, K., Lawson, J., Pym, J.: The analytical and topological theory of semigroups. De Gruyter, Berlin (1990).
85. Hogan, J.: Bisimple semigroup with idempotents well-ordered. Semigroup forum **6**, 296–316 (1973).
86. Hogan, J.: The α-bicyclic semigroup as a topological semigroup. Semigroup forum **28**, 265–271 (1984).
87. Hogan, J.: Hausdorff topologies on the α-bicyclic semigroup. Semigroup forum **36**(1), 189–209 (1987).
88. Hognas, G., Mukherjea, A.: Probability measures on semigroups. Convolution products, random walks, and random matrices. Plenum Press, New York (1995).
89. Howie, J.: Product of idempotents in certain semigroups of transformations. Proc. Edinburgh Math. Soc. **17**, 223–236 (1971).
90. Iseki, K.: On compact abelian semigroups. Michigan Math. J. **2**, 59–60 (1953–1954).
91. Jones, D.: Polycyclic monoids and their generalizations.: Dissertation, Heriot-Watt University (2011).
92. Jones, D., Lawson, M.: Graph inverse semigroups: Their characterization and completion. J. Algebra **409**, 444–473 (2014).
93. Kalmbach, G.: Measures and Hilbert lattices. World Scientific Publishing Company, Singapore (1986).
94. Katetov, M.: Uber H-abgeschlossene und bikompakte Raume. Caspis Pest. Mat. Fys. **69**, 36–49 (1940).

95. Koch, R.: Remarks on primitive idempotents in compact semigroups with zero. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 828–833 (1954).
96. Koch, R.: On monothetic semigroups. Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 397–401 (1957).
97. Koch, R.: Some open questions in topological semigroups. Anais Acad. Brasil. Ci. **41**(1), 19—20 (1969).
98. Kunen, K.: Set Theory. Mathematical Logic and Foundations **34**, 401 pp. (2013).
99. Lawson, M.: Inverse Semigroups. The Theory of Partial Symmetries. World Scientific Publishing Company, Singapore (1998).
100. Lawson, M.: Primitive partial permutation representations of the polycyclic monoids and branching function systems. Period. Math. Hungar. **58**, 189–207 (2009).
101. Meakin, J., Sapir, M.: Congruences on free monoids and submonoids of polycyclic monoids. J. Austral. Math. Soc. Ser. **54**, 236–253 (2009).
102. Mesyan, Z., Mitchell, J., Morayne M., Peresse, Y.: Topological graph inverse semigroups. Topology Appl. **208**, 106–126 (2016).
103. Mostert, P.: The structure of topological semigroups. Bull. Amer. Math. Soc. **72**, 601–618 (1966).
104. Mukherjea, A., Tserpes, N.: Measures on topological semigroups: convolution products and random walks. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 547, 197 pp. Springer-Verlag, Berlin-New York (1976).
105. Munn, W.: Uniform semilattices and bisimple inverse semigroups. Quart. J. Math. **17**(1), 151–159 (1966).
106. Nachbin, L.: On strictly minimal topological division rings. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 1128–1136 (1949).
107. Nivat, M., Perrot, J.-F.: Une généralisation du monoide bicyclique. C. R. Acad. Sci. **271**, 824–827 (1970).

108. Numakura, K.: On bicompact semigroups. Math. J. Okayama Univ. **1**, 99–108 (1952).
109. Numakura, K.: On bicompact semigroups with zero. Bull. Yamagata Univ. (Natural Sc). **4**, 405-412 (1951).
110. Paalman-de-Miranda, A.: Topological semigroups. Mathem. Centre Tracts 11, Amsterdam (1964).
111. Petrich, M.: Inverse Semigroups. John Wiley & Sons, New York (1984).
112. Protasov, I.: Combinatorics of numbers. ВНТЛ-Класика, Львів (1997).
113. Ravsky, O.: On H-closed paratopological groups. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **61**, 172–179 (2003).
114. Ruppert, W.: Compact semitopological semigroups: an intrinsic theory. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1079, 260 pp. Springer, Berlin (1984).
115. Selden, A.: A nonlocally compact nondiscrete topology for the α-bicyclic semigroup. Semigroup forum **31**, 372–374 (1985).
116. Sierpinski, W.: Cardinal and Ordinal Numbers. Polish Scientific Publishers, Warszava (1965).
117. Sion, M.: A theory of semigroup valued measures. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 355, 140 pp. Springer-Verlag, Berlin-New York (1973).
118. Stephenson, R.: Minimal topological groups. Math. Ann. **192**, 193–195 (1971).
119. Stepp, J.: A note on maximal locally compact semigroups. Proc. Amer. Math. Soc. **20**, 251–253 (1969).
120. Stepp, J.: Algebraic maximal semilattices. Pacific J. Math. **58**(1), 243–248 (1975).
121. Schwarz, S.: Poznamka k teorii bikompaktnyh pologrup. Mat.-fiz. časop. **5**, 88–89 (1955).
122. Tamura, T.: On compact one-idempotent semigroups. Kodai Math. Sem. Repts. **1**, 17–21 (1954).

123. Wallace, A.: A note on mobs, I. Anais. Acad. Brasil. Ci. **24**, 329–334 (1952).
124. Wallace, A.: A note on mobs, II. Anais. Acad. Brasil. Ci. **25**, 335–336 (1953).
125. Wallace, A.: Cohomology, dimension and mobs. Summa Brasil. Math. **3**, 43–54 (1953).
126. Wallace, A.: Indecomposable semigroups. Math. J. Okayama Univ. **3**, 1–3 (1953).
127. Wallace, A.: Inverses in euclidean mobs. Math. J. Okayama Univ. **3**, 23–28 (1953).
128. Wallace, A.: One-dimensional homogeneous clans are group. Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. **58**, 578–580 (1955).
129. Wallace, A.: The position of C-sets in semigroups. Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 639–642 (1955).
130. Wallace A.: The structure of topological semigroups. Bull. Amer. Math. Soc. **61**, 95-112 (1955).
131. Weil, A.: L'integration dans les groupes lopologiques et ses applications. Actualites Scientifiques №869, Paris (1938).
132. Weiss, W.: An introduction to set theory. Math. Toronto University. http://www.math.toronto.edu/weiss/Set_Theory.pdf (2014). Accesed 15 April 2014.
133. Zelenyuk, Y.: On topologizing groups. J. Group Theory **10**(2), 235—244 (2007).
134. Zelenyuk, Y.: Ultrafilters and topologies on groups. De Gruyter, Berlin (2011).

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Список публікацій в яких опубліковано основні результати дисертації:

1. Bardyla, S., Gutik, O.: On H-complete topological semilattices. Математичні студії. **38**(2), 118–123 (2012).
2. Bardyla, S., Gutik, O.: On a semitopological polycyclic monoid. Algebra Discr. Math. **21**(2), 163–183 (2016).
3. Bardyla, S.: Classifying locally compact semitopological polycyclic monoids. Математичний вісник Наукового товариства ім. Шевченка. **13**, 21–28 (2016).
4. Bardyla, S., Gutik, O.: On a complete topological inverse polycyclic monoid. Карпатські математичні публікації. **8**(2), 183–194 (2016).
5. Bardyla, S.: On a semitopological α-bicyclic monoid. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. **81**, 9–22 (2016).
6. Bardyla, S., Gutik, O., Ravsky, A.: H-closed quasitopological groups. Topology Appl. **217**, 51–58 (2017).

Список публікацій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Bardyla, S., Gutik, O.: An example of an H-complete topological semilattice which is not AH–complete. In: Abstracts of the International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach, p. 76. University of Lviv, Lviv, 17–21 September 2012.
2. Bardyla, S., Gutik, O.: On H-complete topological semilattices. In: Abstracts of the 9th International Algebraic Conference in Ukraine, p. 20. University of Lviv, Lviv, 8–13 July 2013.

3. Bardyla, S., Gutik, O.: On a semitopological λ-polycyclic monoid. Тези доповідей Наукової конференції присвяченої 100-річчю від народження К. М. Фішмана і М. К. Фаге, с. 134–135. Чернівецький університет, Чернівці, 1–4 липня 2015 р.
4. Bardyla, S., Gutik, O., Ravsky, A.: H-closed quasitopological groups. Тези доповідей X Літньої школи "Алгебра, Топологія, Аналіз", с. 67. Одеська національна академія харчових технологій, Одеса, 3–15 серпня 2015 р.
5. Bardyla, S., Gutik, O., Ravsky, A.: H-closed quasitopological groups. In: Abstracts of the International Conference "Geometry and topology in Odessa - 2016", p. 13. Odessa National Academy of Food Technologies, Odessa, 2–8 June 2016.
6. Bardyla, S., Gutik, O., Ravsky, A.: H-closed quasitopological groups. In: Abstracts of the 7th European Congress of Mathematics, p. 379. Technical University of Berlin, Berlin, 18–22 July 2016.
7. Bardyla, S., Gutik, O.: On the embeddings and closures of a topological λ-polycyclic monoid. Тези доповідей XI Літньої школи "Алгебра, Топологія, Аналіз", с. 34. Одеська національна академія харчових технологій, Одеса, 1–14 серпня 2016 р.
8. Bardyla, S., Gutik, O.: On the embeddings and closures of a topological λ-polycyclic monoid. In: Abstracts of the International Conference dedicated to the 120th anniversary of Kazimierz Kuratowski, p. 9. University of Lviv, Lviv, 27 September–1 October 2016.
9. Bardyla, S.: On the semitopological locally compact α-bicyclic monoid In: Abstracts of Winter School in Abstract Analysis, section Set theory and Topology. Hejnice, Czech Republic, 28 January–4 February 2017.

Апробація результатів дисертації:

1. семінар з топологічної алгебри у Львівському національному уні-

верситеті імені Івана Франка. Львів, 2012, 2014, 2015, 2016 р.;

2. міжнародна конференція присвячена 120-річчю з дня народження Стефана Банаха, Львів, 17–21 вересня 2012 р.;
3. дев'ята міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, Львів, 8–13 липня 2013 р.;
4. семінар з топологічної алгебри в університеті міста Градець Кралове, Чехія, вересень 2014 р.;
5. X Літня школа "Алгебра, Топологія, Аналіз", Одеса, 3–15 серпня 2015 р.;
6. семінар "Топологія і застосування" у Львівському національному університеті імені Івана Франка. Львів, 2015, 2016 р.;
7. міжнародна конференція "Геометрія і топологія в Одесі", Одеса, 2–8 червня 2016 р.;
8. 7-ий європейський математичний конгрес, Берлін, 18-22 липня 2016 р.;
9. XI Літня школа "Алгебра, Топологія, Аналіз", Одеса, 1–14 серпня 2016 р.;
10. міжнародна конференція присвячена 120-річчю з дня народження Казіміра Куратовського, Львів, 27 вересня –1 жовтня 2016 р.;
11. семінар з абстрактного аналізу в Політехнічному університеті міста Лодзь, Польща, жовтень 2016 р.;
12. Зимова школа з абстрактного аналізу, Хейніце, Чехія, 28 січня – 4 лютого 2017 р.