Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia mathematica* und verwandter Systeme I von Kurt Gödel, *Monatshefte für Mathematik und Physik 38*, 173–198.

In den *Monatsheften für Mathematik und Physik* erschien 1931 eine sehr wichtige Arbeit von Kurt Gödel. Die Herausgeberschaft der *Monatshefte für Mathematik* freut sich auf das Wiedererscheinen dieser Arbeit, die als der spannendste und am öftesten zitierte Artikel der Mathematischen Logik des 20. Jahrhunderts gilt, zu Gödels 100. Geburtstag. In diesem Kommentar werden der Hintergrund und die Bedeutung dieser besonderen Arbeit zusammengefasst.

Hintergrund: Das Hilbert'sche Programm

Um aus der Krise in den Grundlagen der Mathematik, die sich aus den Paradoxien der Mengenlehre ergab, zu führen, schlug der berühmte Mathematiker David Hilbert folgende zwei Wege vor:

Erstens: Die Mathematik sollte formalisiert, d.h. in ein formales System eingebettet werden. Zu diesem System gehören eine Liste von primitiven Symbolen, eine Menge von endlichen Folgen solcher Symbole (von *Formeln*) und eine Menge von endlichen Folgen von Formeln (von *formalen Beweisen*). Eine Formel ist genau dann *formal beweisbar*, wenn sie die letzte Formel eines formalen Beweises ist. Die Ableitung der Formeln sollte rein mechanisch sein, ohne ihre Bedeutung zu berücksichtigen. Die Bedeutung der Formeln ergibt sich allein aus der Wahl der Axiome und der Schlussregeln des Systems; so vermeiden wir die Benutzung von Begriffen, die ihre klare und eindeutige Bedeutung überschreiten und deshalb das Risiko besitzen, zu Paradoxien zu führen.

Zweitens: Wir sollten die *Konsistenz (Widerspruchsfreiheit)* und *Vollständigkeit* des obigen Systems S beweisen; d.h., wir sollten beweisen, dass es für jeden Satz A entweder einen Beweis aus S von A oder einen Beweis aus S der Negation $\sim A$ von A gibt (und nicht beides). Obwohl die Begriffe der Mathematik sehr abstrakt sein können, besteht das System S nur aus *endlichen* Objekten, und S verwendet nur *finitistische* Methoden. Daher kann S als eine elementare Theorie über die natürlichen Zahlen betrachtet werden, und ein Konsistenzbeweis aus S ist eine sichere Garantie für die Konsistenz der ganzen Mathematik.

Gödels Arbeit

Durch Nachdenken über das *Lügner-Paradox („Dieser Satz ist falsch")* entdeckte Gödel, dass *die Wahrheit* in der Zahlentheorie undefinierbar ist: Wenn wir die Formeln der Zahlentheorie mit der Variable x als $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$ auflisten, gibt es keine Formel $\varphi(x, y)$ der Zahlentheorie, so dass $\varphi(m, n)$ genau dann gilt, wenn $\varphi_m(n)$ wahr ist. Sonst wäre die Formel $\sim \varphi(x, x)$ gleich $\varphi_n(x)$ für ein n, was zum Widerspruch $\varphi_n(n) \leftrightarrow \sim \varphi(n, n) \leftrightarrow \sim \varphi_n(n)$ führt!

Eine riesige Leistung Gödels ist der Beweis, dass, obwohl *die Wahrheit* in der Zahlentheorie undefinierbar ist, *die Beweisbarkeit* eines formalen Systems S für die Zahlentheorie trotzdem definierbar ist. Um dieses Resultat zu erreichen, wies er den Formeln und den Beweisen aus S Kodenummern (*Gödelnummern*) aus der natürlichen Zahlen zu und zeigte, dass die Relation „m ist die Kodenummer eines Beweises der Formel mit Kodenummer n" durch eine zahlentheoretische Formel definierbar ist. So wandelte er den Widerspruch des letzten Abschnitts auf folgende eindrucksvolle Äquivalenz um:

$\varphi_n(n) \leftrightarrow \varphi(n, n)$ unbeweisbar $\leftrightarrow \varphi_n(n)$ unbeweisbar,

was zum wahren, aber unbeweisbaren Satz $\sigma = \varphi_n(n)$ führt. So bewies er die *Unvollständigkeit* von S, und sogar jedes formalen Systems für die Zahlentheorie, *den ersten Unvollständigkeitssatz.* Dies war eine schockierende Niederlage für das Hilbert'sche Programm.

Eine weitere Niederlage für Hilberts Programm stammt aus *Gödels zweitem Unvollständigkeitssatz.* Gödel sah, dass der unbeweisbare Satz σ des letzten Abschnitts aus der Konsistenz des Systems S folgt. Aus der Gödelnummernmethode folgt, dass die Konsistenz von S als ein zahlentheoretischer Satz Kon S formuliert werden kann. Somit erhielt Gödel die beweisbare Implikation

$$\text{Kon } S \to \sigma.$$

Da σ nicht aus S beweisbar ist, muss auch Kon S unbeweisbar sein! Gödels dramatische Schlussfolgerung heißt: Kein formales System für die elementare Zahlentheorie kann seine eigene Konsistenz beweisen.

Gödels Artikel beginnt mit einer informellen Beschreibung des Beweises des ersten Unvollständigkeitssatzes. Im zweiten Teil präsentiert er die Details dafür: Formale Systeme, Gödelnummern, arithmetische Darstellbarkeit der Beweisbarkeit, Beweis des Satzes. Im dritten Teil zeigt er die Unentscheidbarkeit der Gültigkeit in der Logik erster Stufe. Der letzte Teil beschäftigt sich mit dem zweiten Unvollständigkeitssatz und dessen Konsequenzen für das Hilbert'sche Programm.

Gödels Arbeit interessierte viele Kollegen, und seine Resultate wurden vom breiten mathematischen Publikum schnell akzeptiert. Sein Artikel beeinflusst fast alle Bereiche der Mathematischen Logik. Einige wichtige Entwicklungen in der Mathematischen Logik folgten wenige Jahre später und gehen unmittelbar auf Gödels Arbeit zurück:

1. Die Entwicklung des allgemeinen Begriffs eines formalen Systems und einer rekursiven Funktion (Turing).
2. Eine allgemeine Theorie der Unentscheidbarkeit logischer Theorien (Church, Tarski).
3. Eine Änderung des Hilbert'schen Programms, die unendliche, aber trotzdem finitistische Methoden erlaubt (Gentzen).

Es ist eine Ehre für die Herausgeberschaft der *Monatshefte für Mathematik*, diese bahnbrechende Arbeit in der Mathematischen Logik anlässlich Gödels 100. Geburtsjahres wieder zu veröffentlichen.

Sy-David Friedman
Kurt Gödel Research Center
Universität Wien